

Cognome ..... Nome .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

**Domanda 1**

[4 punti]

- (i) Dare la definizione di funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $x = x_0$ .
- (ii) Disegnare il grafico di una funzione  $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  continua ma non derivabile in  $x = 3$ .

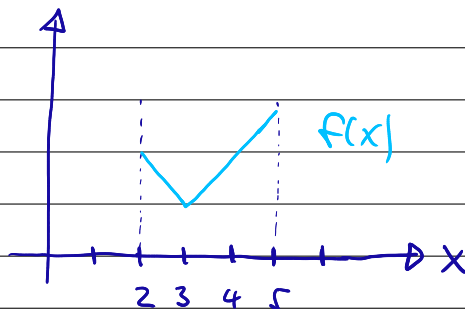
|          |  |
|----------|--|
| D1       |  |
| D2       |  |
| E1       |  |
| E2       |  |
| E3       |  |
| E4       |  |
| E5       |  |
| $\Sigma$ |  |

**Risposta**

- (i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x = x_0$  con derivata  $f'(x_0)$

se il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$  converge.

- (ii)

**Domanda 2**

[4 punti]

- (i) Enunciare il teorema degli zeri.
- (ii) Verificare che l'equazione  $x^3 + x^2 = 7$  ammette una soluzione nell'intervallo  $[1, 2]$ .

**Risposta**

- (i) Sia  $f \in C[a, b]$ . Se  $f(a) \cdot f(b) < 0$  allora  $\exists c \in (a, b)$

t. c.  $f(c) = 0$ .

- (ii) •  $x^3 + x^2 = 7 \Leftrightarrow f(x) := x^3 + x^2 - 7 = 0$ .

•  $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua.

•  $f(1) = 1^3 + 1^2 - 7 = -5 < 0$ ,  $f(2) = 2^3 + 2^2 - 7 = 8 + 4 - 7 = 5 > 0$

$\Rightarrow \exists c \in [1, 2]$  t. c.  $f(c) = 0$ , cioè  $x=c$  solve l'equazione  $x^3 + x^2 = 7$ .

## Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{n+2}{3n+4} \right)^{5n} =: a_n$$

Risoluzione

La serie è a termini positivi. Usando il criterio della radice segue

$$\sqrt[n]{a_n} = \left( \left( \frac{n+2}{3n+4} \right)^{5n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left( \frac{n+2}{3n+4} \right)^5 \rightarrow \left( \frac{1}{3} \right)^5 =: q < 1$$

$\hookrightarrow \frac{1}{3}$  per  $n \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$  La serie  $S$  converge

## Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 4 della funzione  $f(x) = 2 \cdot \cos(x^2) - x \cdot \ln(1+3x)$ .

Risoluzione

$$\begin{aligned} \bullet \cos(t) &= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \xrightarrow{t=x^2} \cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) \\ &\quad \text{per } t \rightarrow 0 \qquad \qquad \qquad = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \xrightarrow{t=3x} x \cdot \ln(1+3x) = x \cdot \left( 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o((3x)^3) \right) \\ &\quad \text{per } t \rightarrow 0 \qquad \qquad \qquad = 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 + 9x^4 + o(x^4) \\ &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_4(x) &= 2 \cdot \left( 1 - \frac{x^4}{2} \right) - \left( 3x^2 - \frac{9}{2}x^3 + 9x^4 \right) \\ &= 2 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^3 - 10x^4 \end{aligned}$$

### Esercizio 3

[5 punti]

Trovare la retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = x \cdot \sqrt{12 + x^2}$  nel punto  $x_0 = 2$ .

Risoluzione

$$\bullet \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\bullet \quad f(x_0) = 2 \cdot \sqrt{12 + 2^2} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\bullet \quad f'(x) = 1 \cdot (12 + x^2)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (12 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x \Rightarrow$$

$$f'(2) = (12 + 4)^{1/2} + 2 \cdot (12 + 4)^{-1/2} \cdot 2 \\ = 4 + 2 \cdot 4^{-1} \cdot 2 = 5$$

$$\Rightarrow t(x) = 8 + 5 \cdot (x - 2)$$

### Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2) \cdot y^2}{x^4 + y^4} =: f(x, y)$$

Risoluzione

Ponendo  $y = m \cdot x$  segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cdot m^2 \cdot x^2}{x^4 + m^4 \cdot x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cdot x^2}{(1 + m^4) \cdot x^2} = \frac{m^2}{1 + m^4}$$

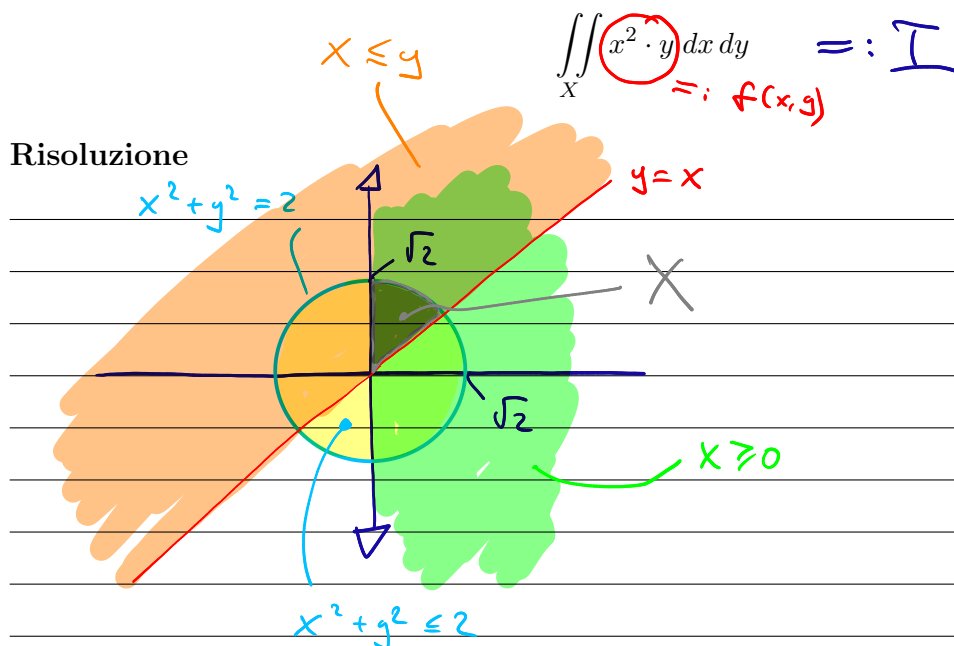
dipende da  $m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$  il limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  non esiste.

## Esercizio 5

[6 punti]

Disegnare il dominio  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y\}$  e calcolare l'integrale doppio



- $f$  è continua
- $X$  corrisponde a  $X' := \{(r, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$   
 $= [0, \sqrt{2}] \times [\pi/4, \pi/2]$  in coordinate polari

$$\Rightarrow I = \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \overbrace{r^2 \cdot \cos^2(\vartheta)}^{=x^2} \cdot \overbrace{r \cdot \sin(\vartheta)}^{=y} \cdot \overbrace{r \cdot d\vartheta \, dr}^{=dx \, dy}$$

$$= - \int_{r=0}^{\sqrt{2}} r^4 \, dr \cdot \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2} \overbrace{\cos^2(\vartheta) \cdot (-\sin(\vartheta))}^{=\cos'(\vartheta)} \, d\vartheta$$

$$= - \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \left[ \frac{\cos^3(\vartheta)}{3} \right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left( \underbrace{\cos^3(\pi/2)}_{=0} - \underbrace{\cos^3(\pi/4)}_{(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}} \right) = \frac{4}{15} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{2}{15}$$