Analisi Matematica 1, Scritto 1-A. Durata della prova: 2 ore 25.1.17

Firma: .....

Cognome ..... Nome ..... A.A. .....

Matricola ..... Corso di Laurea .....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza di una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

(ii) Fare l'esempio di una serie con $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 2$.

Risposta

(i) Sia $s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$ per $n \in \mathbb{N}$. Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$.

(ii) Per esempio $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-1/2} = 2$ (serie geometrica con $q = 1/2$)

(oppure: Sia $a_0 = 2$, $a_k = 0 \ \forall k \geq 1$. Allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 2$)

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema degli zeri.

(ii) Verificare che la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(2-x)$ ammette uno zero.

Risposta

(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.

(ii) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ è continua,} \\ \bullet\ f(0) = 0 - \ln(2) < 0 \\ \bullet\ f(1) = 1 - \ln(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{teor. degli zeri}}{\Longrightarrow} \exists\, c \in (0,1)$ t.c. $f(c) = 0$.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{1 - \cosh(x)}$$

Risoluzione

• Denominatore: $1 - \cosh(x) = 1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sim -\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$\Rightarrow$ Numeratore da sviluppare fino al 2° ordine:

$$e^x - \sin(x) - \cos(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (\cancel{x} + o(x^2)) - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2 + o(x^2) \sim x^2 \quad \text{per } x \to 0$$

Principio di sost.

$$\Rightarrow \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{1 - \cosh(x)} \sim \frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin(x) - \cos(x)}{1 - \cosh(x)} = -2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_0^4 \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}}\, dx$$

Risoluzione

$$I = \lim_{a\to 0^+} \int_a^4 \frac{1 - 3x}{2\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\int_a^4 \frac{1}{2} x^{-1/2}\, dx - \int_a^4 \frac{3}{2} x^{1/2}\, dx\right]$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left[x^{1/2}\Big|_a^4 - x^{3/2}\Big|_a^4 \right]$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(4^{1/2} - a^{1/2} - \left(4^{3/2} - a^{3/2}\right)\right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(\sqrt{4} - \underbrace{\sqrt{a}}_{\to 0} - (\sqrt{4})^3 - \underbrace{(\sqrt{a})^3}_{\to 0}\right)$$

$$= 2 - 2^3 = -6$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(-1,2)$ per $f(x,y) = x^2 \cdot y$ e il versore $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Risoluzione

- $f_x(x,y) = 2x \cdot y \Rightarrow f_x(-1,2) = -2 \cdot 2 = -4$

  $f_y(x,y) = x^2 \Rightarrow f_y(-1,2) = 1$

- f è $C^1 \Rightarrow f$ è differenziabile, quindi per il teorema del gradiente segue

$$D_v f(-1,2) = \operatorname{grad} f(-1,2) \cdot v = (-4, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-5}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Esercizio 4

[5 punti]

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità in $(x_0, y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot \sin(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Risoluzione

- Poniamo $y = x \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{x^2+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

Quindi f non è continua in $(0,0) \Rightarrow$
f non è differenziabile in $(0,0)$

- Derivabilità parziale:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{0-0}{h}}} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0,0)$ con $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

Esercizio 5

[5 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2+x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

• Dominio: $2+x \neq 0$, quindi dominio di $f = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{-2\}}$

• Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

• Asintoti: • $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \frac{4-3}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{4-3}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow \boxed{x=-2}$ è un'asintoto verticale

• $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ possibili asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x(2+x)} = 1$$

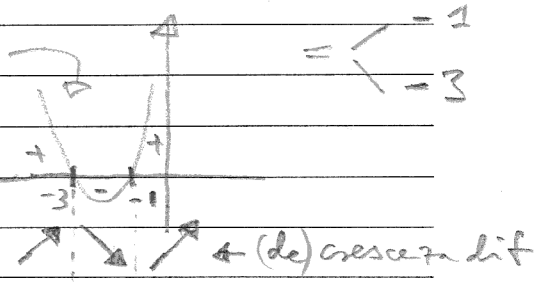
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - m\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{2+x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3-2x-x^2}{2+x}$$

$= -2 \Rightarrow \boxed{y = x-2}$ è un'asintoto obliquo per $x\to\pm\infty$.

• Derivata: $f'(x) = \dfrac{(2+x)\cdot 2x - 1\cdot(x^2-3)}{(2+x)^2} = \dfrac{4x+2x^2-x^2+3}{(2+x)^2}$

$= \dfrac{x^2+4x+3}{(2+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 3}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$

Segno di $f'(x)$ = segno di (x^2+4x+3)



$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \text{ è un pto. di min. loc.} \\ x_2 = -3 \text{ — " — max. loc.} \end{array}}$

Grafico: