

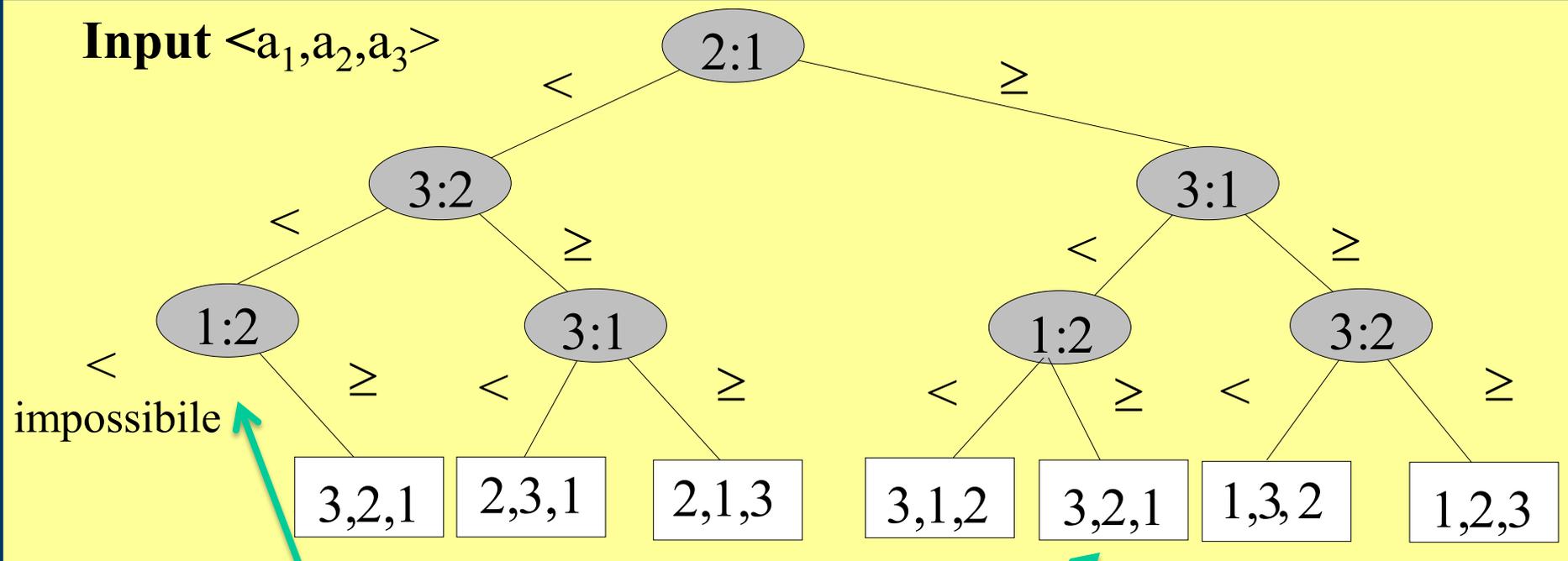
# Algoritmi e Strutture Dati

## Capitolo 4

Un algoritmo di ordinamento ottimo:

Il MergeSort (\*)

# Correzione esercizi: Albero di decisione del SS

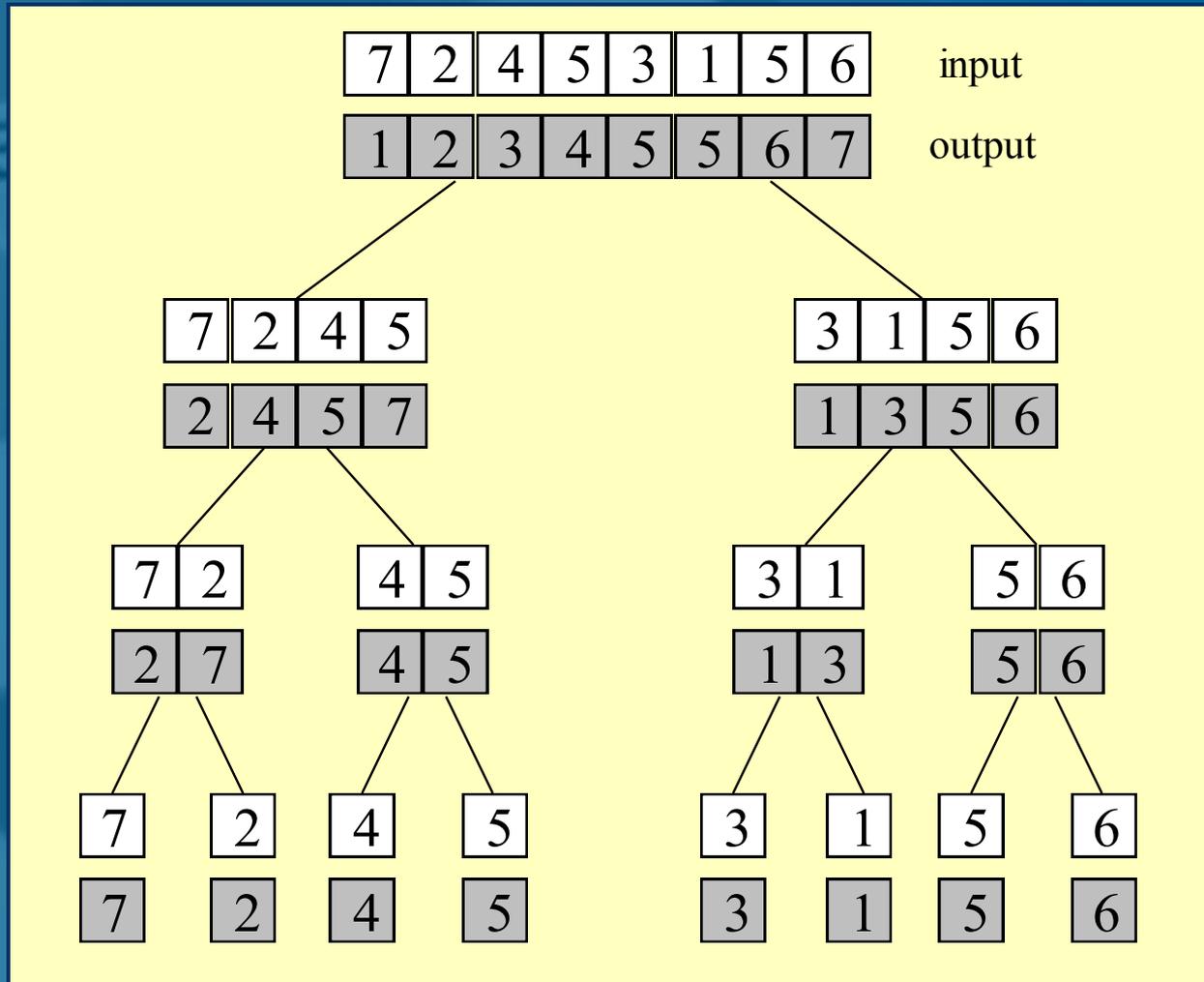


- **Osservazione 1:** l'albero non è strettamente binario: compare un confronto **inutile!**
- **Osservazione 2:** tutte le foglie sono alla stessa altezza (e infatti il SS esegue sempre lo stesso numero di confronti!)
- **Osservazione 3:** questa permutazione  $\langle 3,2,1 \rangle$  è raggiungibile solo nel caso in cui  $a_1 = a_2$

# Un algoritmo di ordinamento ottimo: il MergeSort (J. von Neumann, 1945)

- Problema dell'ordinamento **basato su confronti**:
  - Lower bound -  $\Omega(n \log n)$     albero di decisione
  - Upper bound -  $O(n^2)$     IS 2 e 3
- Abbiamo ridotto il gap tra LB e UB da  $\Theta(n)$  a  $\Theta(n/\log n)$ ; proviamo a costruire un algoritmo ottimo (cioè a ridurre il gap a  $\Theta(1)$ ) usando la tecnica del **divide et impera**:
  - 1 **Divide**: dividi l'array a metà
  - 2 Risolvi il sottoproblema ricorsivamente
  - 3 **Impera**: fonda le due sottosequenze ordinate

# Esempio di esecuzione



Input ed  
output delle  
chiamate  
ricorsive

# Fusione di sequenze ordinate

- Due array ordinati  $A$  e  $B$  possono essere fusi rapidamente:
  - estrai ripetutamente il minimo di  $A$  e  $B$  e copialo nell'array di output, finché  $A$  oppure  $B$  non diventa vuoto
  - copia gli elementi dell'array non ancora completamente svuotato alla fine dell'array di output

**Notazione:** dato un array  $A$  e due indici  $x \leq y$ , denotiamo con  $A[x;y]$  la porzione di  $A$  costituita da  $A[x], A[x+1], \dots, A[y]$

# Algoritmo di fusione di sequenze ordinate

Merge ( $A, i_1, f_1, f_2$ )

1. Sia  $X$  un array ausiliario di lunghezza  $f_2 - i_1 + 1$
2.  $i = 1$
3.  $i_2 = f_1 + 1$
4. **while** ( $i_1 \leq f_1$  e  $i_2 \leq f_2$ ) **do**
5.     **if** ( $A[i_1] \leq A[i_2]$ )
6.     **then**  $X[i] = A[i_1]$
7.         incrementa  $i$  e  $i_1$
8.     **else**  $X[i] = A[i_2]$
9.         incrementa  $i$  e  $i_2$
10. **if** ( $i_1 < f_1$ ) **then** copia  $A[i_1; f_1]$  alla fine di  $X$
11. **else** copia  $A[i_2; f_2]$  alla fine di  $X$
12. copia  $X$  in  $A[i_1; f_2]$

fonde  $A[i_1; f_1]$  e  $A[f_1 + 1; f_2]$   
output in  $A[i_1; f_2]$

**Osservazione:** usa  
l'array ausiliario  $X$

# Costo dell'algoritmo di merge

## Lemma

La procedura **Merge** fonde due sequenze ordinate di lunghezza  $n_1$  e  $n_2$  eseguendo al più  $n_1 + n_2 - 1$  confronti

**Dim:** Ogni confronto “consuma” un elemento di A.

Nel caso peggiore tutti gli elementi tranne l'ultimo sono aggiunti alla sequenza **X** tramite un confronto.

Il numero totale di elementi è  $n_1 + n_2$ . Quindi il numero totale di confronti è  $n_1 + n_2 - 1$ . QED

Numero di confronti:  $C(n=n_1 + n_2) = O(n_1 + n_2) = O(n)$   
(si noti che vale anche  $C(n) = \Omega(\min\{n_1, n_2\})$ )

Numero di operazioni (confronti + copie)?  $T(n) = \Theta(n_1 + n_2)$

# MergeSort

MergeSort(A, i, f) ←

1. **if** ( $i \geq f$ ) **then return**
2.  $m = \lceil (i+f)/2 \rceil$
3. MergeSort(A, i, m)
4. MergeSort(A, m+1, f)
5. Merge(A, i, m, f)

Ordina (ricorsivamente)  $A[i:f]$

Ovviamente la chiamata principale è  $\text{MergeSort}(A, 1, n)$

# Tempo di esecuzione

- Il **numero di confronti** del MergeSort è descritto dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$C(n) = 2 C(n/2) + \Theta(n) \quad C(1)=0$$

(si noti che  $f(n)=\Theta(n)$ , in quanto il numero di confronti nelle fusioni è ovviamente  $C(n)=O(n)$ , ma anche  $C(n)=\Omega(\min\{n_1, n_2\})=\Omega(\min\{n/2, n/2\})=\Omega(n)$ )

- Usando il caso 2 del Teorema Master (infatti  $a=b=2$ , e quindi  $f(n)\equiv\Theta(n)=\Theta(n^{\log_2 2})\equiv\Theta(n^{\log_b a})$ ), si ottiene

$$C(n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log n) = \Theta(n \log n)$$

- Infine, per il tempo di esecuzione totale (confronti + copie), si ha:

$$T(n) = 2 T(n/2) + \Theta(n) \quad T(1)=1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

# Più precisamente...

1. Nel **caso peggiore**, il MS esegue  $(n \lceil \log n \rceil - 2^{\lceil \log n \rceil} + 1)$  confronti, che corrisponde ad un numero compreso tra  $(n \log n - n + 1)$  e  $(n \log n + n + O(\log n))$
2. Nel **caso medio**, il MS esegue  $(n \lceil \log n \rceil - 2^{\lceil \log n \rceil} + 1) - 0.2645 \cdot n$  confronti
3. Se modificassimo la procedura di **Merge** facendo un controllo preliminare tra ultimo elemento della prima sequenza e primo della seconda prima ancora di allocare memoria aggiuntiva, allora nell'ipotesi in cui l'array di input fosse già ordinato il MS eseguirebbe  $\Theta(n)$  confronti; infatti, l'equazione di ricorrenza diventerebbe  $C(n) = 2 C(n/2) + \Theta(1)$ , caso 1 del teorema master con soluzione  $C(n) = \Theta(n^{\log_2 2}) \equiv \Theta(n)$

# Osservazioni finali

- Problema dell'ordinamento: abbiamo chiuso il gap!
  - Lower bound -  $\Omega(n \log n)$  albero di decisione
  - Upper bound –  $\Theta(n \log n)$  Merge Sort
- Il **MergeSort** è dunque un algoritmo (asintoticamente) **ottimo** rispetto al numero di confronti eseguiti nel caso peggiore
- Il **MergeSort** non ordina *in loco*, e utilizza memoria ausiliaria (l'occupazione di memoria finale è pari a  $\Theta(n \log n)$ )

## Esercizi di approfondimento

- Illustrare l'evoluzione di **MergeSort** applicata all'array  $A = \langle 31, 41, 59, 26, 41, 58, 11, 7 \rangle$
- Risolvere la relazione di ricorrenza del MergeSort (costo complessivo) utilizzando il **metodo dell'iterazione**