Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Coppie critiche: calcolo e convergenza

Monica Nesi

Consideriamo l'esercizio C3 in [1].
Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{array}{rcl} f(f(x,y),z) & \rightarrow & f(x,f(y,z)) \\ f(g(x,y),z) & \rightarrow & g(f(x,z),f(y,z)) \\ g(y,y) & \rightarrow & y \\ f(a,x) & \rightarrow & x \end{array}$$

Verificare che R è localmente confluente.

Notare che le regole di R rappresentano le seguenti proprietà: la prima regola (r1) esprime l'associatività da sinistra a destra per f, la seconda (r2) è la distributività di f rispetto a g, la terza (r3) rappresenta l'idempotenza di g e l'ultima regola (r4) afferma l'esistenza di un elemento neutro (o identità) a sinistra per f.

In base al Lemma di Huet verificare che R è localmente confluente equivale a verificare che tutte le coppie critiche di R sono convergenti. Per calcolare le coppie critiche occorre che l'intersezione tra gli insiemi di variabili delle regole sia vuota (cfr. definizione di c.c.). Per assicurare tale ipotesi, una possibilità è ridenominare le variabili nelle regole di R in modo opportuno. Per esempio, R diventa il sistema seguente:

$$\begin{array}{rcl} f(f(x_1,y_1),z_1) & \rightarrow & f(x_1,f(y_1,z_1)) \\ f(g(x_2,y_2),z_2) & \rightarrow & g(f(x_2,z_2),f(y_2,z_2)) \\ g(y_3,y_3) & \rightarrow & y_3 \\ f(a,x_4) & \rightarrow & x_4 \end{array}$$

Nel calcolare le coppie critiche di R occorre controllare anche se una regola si sovrappone su se stessa in una posizione interna. Notare che, affinché una regola si sovrapponga su se stessa in una posizione $p \neq \epsilon$, è necessario che il simbolo alla radice del lato sinistro compaia anche internamente al lato sinistro stesso. Tale condizione è necessaria, ma non è in generale sufficiente. [1] Per esempio, la regola r1 si sovrappone su se stessa nella posizione $p = 1$. Considerando due varianti di tale regola si può calcolare la coppia critica come segue:

1. $cc(r1, r1) \qquad p = 1 \qquad \sigma = \{f(x_1, y_1)/x,\ z_1/y\}$

$$
\begin{array}{ccc}
 & f(f(f(x_1, y_1), z_1), z) & \\
\swarrow & & \searrow \\
f(f(x_1, f(y_1, z_1)), z) & & f(f(x_1, y_1), f(z_1, z))
\end{array}
$$

La c.c. è data dai due termini ottenuti riducendo il termine piú generale all'origine del picco di locale confluenza tramite la regola r1 nelle posizioni $p = 1$ e $p = \epsilon$. Per verificare la convergenza della c.c., vediamo se è possibile applicare passi di riscrittura in R ai termini della c.c. fino a ridurli ad uno stesso termine. Le riduzioni possibili sono le seguenti:

$$f(f(x_1, f(y_1, z_1)), z) \rightarrow_{r1, p=\epsilon} f(x_1, f(f(y_1, z_1), z)) \rightarrow_{r1, p=2} f(x_1, f(y_1, f(z_1, z)))$$
$$f(f(x_1, y_1), f(z_1, z)) \rightarrow_{r1, p=\epsilon} f(x_1, f(y_1, f(z_1, z)))$$

Quindi la c.c. converge. La regola r1 non si sovrappone su altre regole, ovvero il suo lato sinistro non unifica con nessun sottotermine degli altri lati sinistri di R.

Passiamo alla regola r2. Questa regola non si sovrappone su se stessa, ma si sovrappone su r1 in posizione $p = 1$:

2. $cc(r2, r1) \qquad p = 1 \qquad \sigma = \{g(x_2, y_2)/x_1,\ z_2/y_1\}$

$$
\begin{array}{ccc}
 & f(f(g(x_2, y_2), z_2), z_1) & \\
\swarrow & & \searrow \\
f(g(f(x_2, z_2), f(y_2, z_2)), z_1) & & f(g(x_2, y_2), f(z_2, z_1))
\end{array}
$$

La c.c. è convergente in quanto si ha:

[1] La sovrapposizione di una regola su se stessa in posizione ϵ non è da considerarsi.

$$f(g(f(x_2,z_2),f(y_2,z_2)),z_1) \to_{r2,p=\epsilon} g(f(f(x_2,z_2),z_1),f(f(y_2,z_2),z_1))$$
$$\xrightarrow{+}_{r1,p=1,2} g(f(x_2,f(z_2,z_1)),f(y_2,f(z_2,z_1)))$$

$$f(g(x_2,y_2),f(z_2,z_1)) \to_{r2,p=\epsilon} g(f(x_2,f(z_2,z_1)),f(y_2,f(z_2,z_1)))$$

Passando alle altre regole, si hanno le seguenti c.c.

3. $cc(r3,r2)$ $\quad p=1 \quad$ $\sigma = \{y_3/x_2,\ y_3/y_2\}$

$$\begin{tikzcd} & f(g(y_3,y_3),z_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f(y_3,z_2) & & g(f(y_3,z_2),f(y_3,z_2)) \end{tikzcd}$$

La c.c. è convergente in quanto

$$g(f(y_3,z_2),f(y_3,z_2)) \to_{r3,p=\epsilon} f(y_3,z_2)$$

4. $cc(r4,r1)$ $\quad p=1 \quad$ $\sigma = \{a/x_1,\ x_4/y_1\}$

$$\begin{tikzcd} & f(f(a,x_4),z_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ f(x_4,z_1) & & f(a,f(x_4,z_1)) \end{tikzcd}$$

La c.c. è convergente in quanto

$$f(a,f(x_4,z_1)) \to_{r4,p=\epsilon} f(x_4,z_1)$$

Non esistono altre c.c. e tutte le c.c. di R convergono. Quindi, per il Lemma di Huet R è localmente confluente.

Osservazione L'esercizio C13 in [1] è simile all'esercizio C3 appena svolto, in quanto alcune regole sono le stesse dell'srt R in C3, tranne che per l'*ordine degli argomenti*. Ciò può dar luogo a maggiori o minori possibilità di unificazione e quindi di coppie critiche.

Riferimenti

[1] M. Nesi, Esercizi di Riscrittura,
in `http://www.di.univaq.it/monica/MFI/EserciziR.pdf`.