Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2008-09)

Unificazione sintattica: alcuni esercizi

Monica Nesi

Facendo riferimento all'*algoritmo della forma risolta* di Martelli-Montanari (Sez. 2.5.2 in [1]), consideriamo alcuni problemi di unificazione sintattica.

1. Dati i termini $t_1 = g(x_1, f(x_1))$ e $t_2 = g(x, y)$, calcolare (se esiste) l'mgu di t_1 e t_2.

Il sistema iniziale di equazioni è $E = \{t_1 = t_2\}$, quindi l'algoritmo della forma risolta parte con la configurazione iniziale $(\{g(x_1, f(x_1)) = g(x, y)\}, \emptyset)$. Poiché i simboli di operazione in testa ai due termini dell'unica equazione in E sono uguali, si può applicare la regola di inferenza di *Decomposizione* ottenendo il nuovo sistema $(\{x_1 = x,\ f(x_1) = y\}, \emptyset)$.

Tramite la regola di *Eliminazione di variabile* è possibile stabilire il primo legame tra variabile e termine. Tale regola può essere applicata non deterministicamente su una qualsiasi delle due equazioni, in quanto entrambe soddisfano le precondizioni della regola (ovvero, in entrambe le equazioni almeno un lato dell'equazione è una variabile e tale variabile non occorre nell'altro lato della stessa equazione). Consideriamo l'equazione $x_1 = x$ e fissiamo il legame $\{x/x_1\}$ che viene applicato alle restanti equazioni ottenendo $(\{x/x_1\}\{f(x_1) = y\},\ \{x_1 = x\}) = (\{f(x) = y\},\ \{x_1 = x\})$.

L'applicazione della regola di *Eliminazione di variabile* sull'equazione restante risulta nella configurazione finale $(\{\emptyset, \{x_1 = x,\ y = f(x)\}\})$, la cui seconda componente è un sistema di equazioni in forma risolta che rappresenta la sostituzione mgu $\sigma = \{x/x_1,\ f(x)/y\}$. Infatti, si ha $\sigma(t_1) = \sigma(t_2) = g(x, f(x))$.

Nota che una mgu è unica a meno di ridenominazione di variabili. Applicando la regola di *Eliminazione di variabile* sull'equazione $x_1 = x$, i cui lati sono costituiti entrambi da variabili, in modo da creare l'altro legame possibile $\{x_1/x\}$, si ottiene un'altra mgu per t_1 e t_2 data da $\sigma' = \{x_1/x,\ f(x_1)/y\}$, che risulta essere in particolare un match, in quanto il suo dominio include solo variabili del termine t_2. Notare che entrambe le mgu sono idempotenti per definizione di sistema in forma risolta.

2. Dati i termini $t_1 = g(f(x), g(x, y))$ e $t_2 = g(x', y')$, calcolare (se esiste) l'mgu di t_1 e t_2.

Applicando le regole di *Decomposizione* e di *Eliminazione di variabile* si ha:

$$\begin{array}{l}
(\{g(f(x), g(x,y)) = g(x', y')\}, \emptyset) \\
(\{f(x) = x',\ g(x,y) = y'\}, \emptyset) \\
(\{f(x)/x'\}\{g(x,y) = y'\} = \{g(x,y) = y'\},\ \{x' = f(x)\}) \\
(\emptyset, \{x' = f(x),\ y' = g(x,y)\})
\end{array}$$

che risulta nell'mgu $\sigma = \{f(x)/x',\ g(x,y)/y'\}$, che in particolare è un match.

3. Dati i termini $t_1 = g(x, x)$ e $t_2 = g(y, f(y))$, calcolare (se esiste) l'mgu di t_1 e t_2.

Applicando le regole di *Decomposizione*, *Eliminazione di variabile* e *Fallimento 2*, si ha:

$$\begin{array}{l}
(\{g(x,x) = g(y, f(y))\}, \emptyset) \\
(\{x = y,\ x = f(y)\}, \emptyset) \\
(\{y/x\}\{x = f(y)\} = \{y = f(y)\},\ \{x = y\}) \\
Fallimento
\end{array}$$

in quanto $y \in Var(f(y))$. Quindi i due termini t_1 e t_2 non sono sintatticamente unificabili. In effetti, il termine t_1 richiede che i due argomenti di g siano uguali (denotati dalla stessa variabile x), mentre i due argomenti di t_2 non sono uguali (il secondo argomento ha una f in piú). I termini che contengono piú di una occorrenza di una qualche variabile, come $g(x, x)$ e $g(y, f(y))$, sono detti *non lineari*. Tipicamente, quando si cerca di unificarli sintatticamente, i termini non lineari pongono maggiori restrizioni (risultando quindi meno facilmente unificabili) rispetto ai termini *lineari*, in cui ogni variabile occorre una volta sola.

4. Dati i termini $t_1 = g(x, x)$ e $t_2 = g(y, a)$, calcolare (se esiste) l'mgu di t_1 e t_2.

Applicando le regole di *Decomposizione* e di *Eliminazione di variabile*, si ha:

$$\begin{aligned}
&(\{g(x,x) = g(y,a)\}, \emptyset)\\
&(\{x = y,\ x = a\}, \emptyset)\\
&(\{a/x\}\{x = y\} = \{a = y\},\ \{x = a\})\\
&(\emptyset, \{x = a,\ y = a\})
\end{aligned}$$

che risulta nell'mgu $\sigma = \{a/x, a/y\}$.

5. Dati i termini $t_1 = f(x, f(y, z))$ e $t_2 = f(x', y')$, calcolare (se esiste) l'mgu di t_1 e t_2.

Applicando le regole di *Decomposizione* e di *Eliminazione di variabile* si ha:

$$\begin{aligned}
&(\{f(x, f(y,z)) = f(x', y')\}, \emptyset)\\
&(\{x = x',\ f(y,z) = y'\}, \emptyset)\\
&(\{x/x'\}\{f(y,z) = y'\} = \{f(y,z) = y'\},\ \{x' = x\})\\
&(\emptyset, \{x' = x,\ y' = f(y,z)\})
\end{aligned}$$

che risulta nell'mgu $\sigma = \{x/x',\ f(y, z)/y'\}$, che in particolare è un match. Modulo ridenominazione di variabili, un'altra mgu è $\sigma' = \{x'/x,\ f(y, z)/y'\}$.

Riferimenti

[1] P. Inverardi, M. Nesi e M. Venturini Zilli, "Sistemi di Riscrittura per Termini del Prim'Ordine",
in `http://www.di.univaq.it/monica/MFI/NoteSRT.pdf`.