

Corso di Laurea in Informatica
Metodi Formali dell'Informatica (a.a. 2001-02)

Esercizi di Riscrittura

Monica Nesi

Terminazione

Esercizio T1. Dato il sistema di riscrittura R :

$$\begin{aligned}h(z, g(x, y)) &\rightarrow g(k(x), h(z, y)) \\g(k(x), k(y)) &\rightarrow k(g(x, y))\end{aligned}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{g, h, k\}$ tale che il sistema R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tali precedenze. Motivare la risposta.

Esercizio T2. Data una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned}f(w, g(f(a, x), f(a, y))) &= g(f(w, x), f(w, y)) \\g(f(a, g(x, y)), f(a, y)) &= g(f(a, y), x) \\f(a, g(g(f(w, x), f(w, y)), z)) &= g(f(w, x), f(a, g(f(w, y), z)))\end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $f > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T3. Data una segnatura $\Sigma = \{a, f, g, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned}g(x, f(g(a, f(y, z)), y)) &= g(x, f(y, z)) \\g(f(x, y), z) &= f(x, g(y, z)) \\g(k(x), f(y, x)) &= k(f(x, y))\end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $k > g > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T4. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$:

$$\begin{aligned}k(h(x)) &\rightarrow h(k(x)) \\k(g(x)) &\rightarrow h(h(g(x))) \\f(h(x)) &\rightarrow f(k(x))\end{aligned}$$

Mostrare che non esiste alcun ordinamento sugli operatori in Σ tale che R sia terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento.

Esercizio T5. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned} f(x, g(x, g(h(y), h(z))), g(z, y)) &= f(x, g(z, y), h(g(y, z))) \\ k(x, y) &= g(x, h(y)) \\ g(h(x), k(h(x), h(y))) &= k(x, h(y)) \end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $k > g > h$. Giustificare la risposta.

Esercizio T6. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned} f(g(x, y), h(g(x, y))) &= g(x, h(y)) \\ g(f(g(x, f(y, z)), x), y) &= g(f(x, y), z) \\ g(k(x, z), k(z, y)) &= k(z, g(x, y)) \end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $h > g > f$ e $k > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T7. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned} f(z, g(h(x), h(y))) &= g(h(f(z, x)), h(f(z, y))) \\ f(h(g(x, y)), h(g(y, x))) &= g(h(x), h(y)) \\ h(g(h(x), h(y))) &= h(h(f(x, y))) \end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo \succ_{rpo} basato sulle precedenze $h > g > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T8. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned} g(x, k(f(y), f(z))) &= k(f(g(x, y)), f(g(x, z))) \\ f(k(f(y), f(z))) &= f(f(g(z, y))) \end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $f > k > g$. Giustificare la risposta.

Esercizio T9. Data una segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$, orientare le equazioni

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(k(x), y) \\ f(g(y, x), k(y)) &= k(g(y, x)) \\ f(g(x, z), g(z, y)) &= g(z, f(x, y)) \end{aligned}$$

in modo tale che il sistema di riscrittura risultante sia terminante rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $g > f$ e $h > k > f$. Giustificare la risposta.

Esercizio T10. Dato il sistema di riscrittura R :

$$\begin{aligned} f(g(x, y), x) &\rightarrow g(h(x, y), k(y)) \\ g(k(x), f(x, y)) &\rightarrow k(f(x, y)) \end{aligned}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{f, g, h, k\}$ tale che il sistema R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T11. Dato il sistema di riscrittura R :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\rightarrow g(k(x), y) \\ g(f(k(x), k(y)), k(x)) &\rightarrow f(k(y), x) \end{aligned}$$

determinare un ordinamento sugli operatori $\{f, g, k\}$ tale che R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T12. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R :

$$\begin{aligned} k(h(x, y)) &\rightarrow f(x, y) \\ f(k(x), y) &\rightarrow g(k(f(x, y)), f(x, y)) \\ h(f(x, z), y) &\rightarrow f(h(x, y), h(y, z)) \end{aligned}$$

Determinare un ordinamento sugli operatori $\{f, g, h, k\}$ tale che R risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T13. Determinare se esiste un ordinamento sugli operatori $\{f, g, h\}$ tale che il seguente sistema:

$$\begin{aligned} f(x, g(h(y), h(z))) &\rightarrow g(h(f(x, y)), h(f(x, z))) \\ h(g(h(x), h(y))) &\rightarrow h(h(f(x, y))) \end{aligned}$$

risulti terminante rispetto all'rpo basato su tale ordinamento. Giustificare la risposta.

Esercizio T14. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned} g(a, x) &\rightarrow x \\ g(h(x), y) &\rightarrow h(g(x, y)) \\ f(a) &\rightarrow a \\ f(h(a)) &\rightarrow h(a) \\ f(h(h(x))) &\rightarrow g(f(x), f(h(x))) \end{aligned}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale R risulti terminante. Giustificare la risposta.

Esercizio T15. Sia dato il seguente sistema di riscrittura R su una segnatura Σ tale che $f \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} f(f(x, y), z) &\rightarrow f(x, z) \\ f(x, f(y, z)) &\rightarrow f(x, z) \end{aligned}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale il sistema di riscrittura R risulti terminante.

Confluenza, Coppie Critiche, Completamento

Esercizio C1. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(x, x) &= x \\ g(b, x) &= x \\ f(g(x, a), a) &= g(x, a) \\ g(z, f(x, y)) &= f(g(z, x), g(z, y)) \end{aligned}$$

- i) Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $f > g$.
- ii) Dati i termini ground $t_1 = g(b, f(g(b, a), g(b, f(a, a))))$ e $t_2 = f(f(a, a), g(b, a))$, decidere se $t_1 =_E t_2$ utilizzando il sistema di riscrittura ottenuto al punto i).
- iii) Si modifichi la precedenza tra gli operatori data al punto i), ponendo $g > f$. Verificare che il completamento di E rispetto al nuovo rpo diverge.

Esercizio C2. Data una segnatura $\Sigma = \{I, *\}$, sia E la seguente teoria equazionale costituita dal solo assioma:

$$I(x) * (x * y) = y$$

Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $I > *$, motivando i vari passi della procedura di completamento ed il risultato ottenuto.

Esercizio C3. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(f(x, y), z) &\rightarrow f(x, f(y, z)) \\ f(g(x, y), z) &\rightarrow g(f(x, z), f(y, z)) \\ g(y, y) &\rightarrow y \\ f(a, x) &\rightarrow x \end{aligned}$$

Verificare che R è localmente confluyente.

Esercizio C4. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$f(x, a) \rightarrow x$$

$$\begin{aligned}
f(a, x) &\rightarrow x \\
f(x, x) &\rightarrow x \\
g(x, g(b, y)) &\rightarrow g(x, y) \\
g(a, f(g(b, x), x)) &\rightarrow g(a, x)
\end{aligned}$$

Verificare che R è localmente confluyente.

Esercizio C5. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$:

$$\begin{aligned}
f(x, g(x, y)) &= g(x, y) \\
f(x, x) &= x \\
g(x, x) &= x \\
g(h(x), h(y)) &= g(x, y)
\end{aligned}$$

Completare E rispetto ad un qualsiasi rpo.

Esercizio C6. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{f, g, h, k\}$:

$$\begin{aligned}
f(g(x, y)) &= h(x, y) \\
g(k(x), y) &= k(g(x, y))
\end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di E , rispetto ad un rpo basato sulle precedenze $g > k > f > h$, diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C7. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{aligned}
f(x, x) &= x \\
g(x, a) &= x \\
g(a, x) &= x \\
g(x, x) &= x \\
f(x, g(y, x)) &= g(x, f(x, y)) \\
g(f(x, y), x) &= f(x, g(x, y))
\end{aligned}$$

Completare E rispetto ad un rpo basato sulla precedenza $g > f$.

Esercizio C8. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$f(g(f(x), a)) = f(g(x, a))$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un qualsiasi rpo) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C9. Sia data la seguente teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{c, f, g\}$:

$$g(f(g(x, c)), c) = f(g(x, c))$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un qualsiasi ordinamento di semplificazione) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C10. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{aligned} g(x, x) &= x \\ f(x, g(y, z)) &= f(x, z) \\ g(g(x, y), z) &= g(x, z) \\ g(x, g(y, z)) &= g(x, z) \end{aligned}$$

Verificare che il sistema di riscrittura ottenuto orientando le equazioni di E rispetto ad un qualsiasi rpo è canonico.

Esercizio C11. Sia data la seguente teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{a, b, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(f(x, a), y) &= f(x, y) \\ g(x, f(b, z)) &= f(x, z) \\ f(y, g(b, z)) &= f(y, z) \end{aligned}$$

Verificare che il sistema di riscrittura, ottenuto orientando le equazioni di E rispetto ad un rpo \succ_{rpo} basato sulla precedenza $g > f$, è canonico.

Esercizio C12. Sia data la teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(x, x) &= e \\ f(g(x), y) &= g(f(x, y)) \end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un rpo \succ_{rpo} basato sulle precedenze $f > g > e$) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C13. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(a, x) &\rightarrow x \\ f(x, a) &\rightarrow x \\ f(z, g(x, y)) &\rightarrow g(f(z, x), f(z, y)) \\ f(x, f(y, z)) &\rightarrow f(f(x, y), z) \end{aligned}$$

Verificare che R è localmente confluyente.

Esercizio C14. Sia data la teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{f, g, h\}$:

$$\begin{aligned} f(h(x), y) &= h(f(x, y)) \\ g(x, f(x, y)) &= g(x, y) \end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di E (rispetto ad un rpo \succ_{rpo} basato sulla precedenza $f > h$) diverge ed individuare il pattern di divergenza.

Esercizio C15. Sia data la teoria equazionale E su una segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{aligned} g(f(x, y), f(x, z)) &= f(x, g(y, z)) \\ g(x, x) &= x \\ f(x, x) &= x \end{aligned}$$

Completare E rispetto ad un rpo \succ_{rpo} basato sulla precedenza $g > f$.

Esercizio C16. Sia dato il sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{a, f\}$:

$$\begin{aligned} f(x, x) &\rightarrow x \\ f(f(x, y), a) &\rightarrow f(x, f(y, a)) \end{aligned}$$

Mostrare che il completamento di R (rispetto ad un qualsiasi ordinamento di semplificazione) diverge, calcolando almeno le prime due regole della catena di divergenza.

Esercizio C17. Sia dato il sistema di riscrittura R su una segnatura Σ tale che $f \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} f(f(x, y), z) &\rightarrow f(x, z) \\ f(x, f(y, z)) &\rightarrow f(x, z) \end{aligned}$$

Determinare un ordinamento sui termini rispetto al quale il sistema di riscrittura R risulti terminante. Quindi verificare che R è confluyente.

Esercizio C18. Sia dato il sistema di riscrittura R sulla segnatura $\Sigma = \{f, g\}$:

$$\begin{aligned} f(g(x), f(x, y)) &\rightarrow y \\ f(f(y, x), g(x)) &\rightarrow y \\ g(f(x, y)) &\rightarrow f(g(y), g(x)) \\ g(g(x)) &\rightarrow x \end{aligned}$$

- i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
- ii) Calcolare almeno 8 delle coppie critiche generate durante il completamento di R rispetto all'ordinamento determinato al punto i).

Narrowing, E-unificazione

Esercizio E1. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned}f(a, x) &\rightarrow a \\f(h(x), y) &\rightarrow g(y, f(x, y)) \\g(h(a), x) &\rightarrow h(x)\end{aligned}$$

Risolvere modulo E l'equazione $f(x, y) = h(a)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero delle derivazioni di narrowing fermandosi alla prima soluzione trovata.

Esercizio E2. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h, k\}$:

$$\begin{aligned}g(a, x) &\rightarrow a \\g(h(x), y) &\rightarrow f(k(y), g(x, y)) \\k(a) &\rightarrow a\end{aligned}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x, y) = k(y)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E3. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{b, f, k\}$:

$$\begin{aligned}f(x, b) &\rightarrow x \\f(x, k(y)) &\rightarrow k(f(x, y))\end{aligned}$$

Risolvere modulo E l'equazione $f(k(x), y) = k(y)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E4. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned}h(h(x)) &\rightarrow x \\g(f(x), y) &\rightarrow f(g(x, y)) \\g(a, x) &\rightarrow x\end{aligned}$$

Risolvere modulo E l'equazione $g(x, f(h(y))) = f(x)$ utilizzando l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E5. Sia R il seguente sistema canonico che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned} h(x, g(y)) &\rightarrow f(h(x, y), x) \\ h(x, e) &\rightarrow x \\ f(e, x) &\rightarrow g(x) \end{aligned}$$

Risolvere modulo E l'equazione $h(x, y) = g(x)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E6. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g\}$:

$$\begin{aligned} g(x, a) &\rightarrow f(x) \\ g(f(x), y) &\rightarrow f(g(x, y)) \end{aligned}$$

- i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
- ii) Verificare che R è confluyente.
- iii) Risolvere modulo E l'equazione $f(x) = g(x, y)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E7. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{a, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned} g(a, x) &\rightarrow x \\ g(h(x), y) &\rightarrow h(g(x, y)) \\ f(a) &\rightarrow a \\ f(h(a)) &\rightarrow h(a) \\ f(h(h(x))) &\rightarrow g(f(x), f(h(x))) \end{aligned}$$

- i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
- ii) Verificare che R è confluyente.
- iii) Risolvere modulo E l'equazione $x = f(x)$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Esercizio E8. Sia dato il seguente sistema R che descrive una teoria equazionale E sulla segnatura $\Sigma = \{e, f, g, h\}$:

$$\begin{aligned} h(x, f(e)) &\rightarrow f(x) \\ g(x, f(y)) &\rightarrow h(g(x, y), x) \\ g(x, e) &\rightarrow e \end{aligned}$$

- i) Determinare un ordinamento sui termini tale che R sia terminante rispetto a tale ordinamento.
- ii) Verificare che R è confluyente.
- iii) Risolvere modulo E l'equazione $g(x, y) = y$ tramite l'algoritmo di E-unificazione basato su narrowing, basilare e normale. Dare l'albero completo delle derivazioni di narrowing.

Riduzione

Esercizio R1. Provare che se per ogni $t, s, u \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \leftarrow t \xrightarrow{*} u$ implica che esiste $t' \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \xrightarrow{*} t' \xleftarrow{*} u$, allora la relazione di riduzione \rightarrow è Church-Rosser.

Esercizio R2. Dimostrare che un sistema di riduzione astratto $\langle A, \rightarrow \rangle$ è confluyente se esiste un sistema di riduzione astratto confluyente $\langle A, \rightarrow_1 \rangle$ tale che $\rightarrow \subseteq \xrightarrow{*}_1 \subseteq \xrightarrow{*}$.

Esercizio R3. Una relazione di riscrittura \rightarrow è *fortemente confluyente* se $\leftarrow \circ \rightarrow \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$ (ovvero per ogni $t, t', t'' \in T_\Sigma(V)$ tale che $t' \leftarrow t \rightarrow t''$ si ha che esiste $s \in T_\Sigma(V)$ tale che $t' \xrightarrow{*} s \xleftarrow{*} t''$), dove $\xrightarrow{*} =_{\text{def}} \rightarrow \cup =$. Dimostrare che una relazione di riscrittura fortemente confluyente è tale che $\leftarrow \circ \xrightarrow{*} \subseteq \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$.

Esercizio R4. Sia data una relazione di riduzione \rightarrow con la seguente proprietà: per ogni $t, s, u \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \leftarrow t \rightarrow u$ si ha che esiste $t' \in T_\Sigma(V)$ tale che $s \rightarrow t' \xleftarrow{*} u$. Provare che per ogni $x, y, z \in T_\Sigma(V)$ tale che $y \xleftarrow{*} x \rightarrow z$ si ha che esiste $y' \in T_\Sigma(V)$ tale che $y \rightarrow y' \xleftarrow{*} z$.

Esercizio R5. Dato un sistema di riduzione astratto $\langle A, \rightarrow \rangle$, la relazione \rightarrow si dice *crescente* se esiste una funzione $|| : A \rightarrow N$ tale che per ogni $a, b \in A$ si ha che $a \rightarrow b$ implica $|a| < |b|$, dove $<$ è l'ordinamento usuale sui numeri naturali N . Provare che se una relazione \rightarrow è crescente, allora la sua inversa \leftarrow è terminante.