Università degli Studi di L'Aquila
Facoltà di Ingegneria

Analisi Matematica I (A.A. 2001/2002)

Docenti: Fabio Camilli, Klaus Engel

Corsi di Laurea in: Ingegneria Ambiente e Territorio, Chimica, Civile, Elettrica, Elettronica, Informatica – Automatica, Meccanica, Telecomunicazioni

Esercizi su Insiemi numerici, Induzione, Successioni e Serie

Esercizio 1. Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\left|\frac{x-3}{x+2}\right| \le 3, \qquad |x+3| < 2 + |x+1|, \qquad x \cdot |x| - 2x + 3 > 0, \qquad |x-1| \cdot |x+1| < 3,$$
$$\frac{|x|-1}{|x+1|} < 2, \qquad \sqrt{x^2 - x + 1} \ge |x+3|, \qquad \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 2, \qquad \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} > \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Esercizio 2. Determinare, se esistono, il minimo, il massimo, l'estremo inferiore e l'estremo superiore degli insiemi

$$A := \left\{ \frac{(-1)^n}{2+n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad B := \left\{ \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}^*, \qquad C := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$D := \left\{ n^2 - \frac{3}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad E := \left\{ \frac{m}{n} - \frac{n}{m} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad F := \left\{ \frac{|3-n|}{3+n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(* Usare $x + \frac{1}{x} \ge 2$ per ogni $x > 0$.)

Esercizio 3. Verificare per induzione le seguenti affermazioni per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), \qquad \sum_{k=2n+1}^{3n} k = \frac{n(5n+1)}{2},$$
$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \binom{n+1}{2},$$
$$3\left(\frac{n}{3}\right)^n \le n! \quad \text{(usare } (1 + {}^1\!/_n)^n \le 3\text{)}, \qquad \frac{6^{2n} - 3^n}{11} \text{ è un numero intero per ogni } n \ge 1.$$

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{5} - \sqrt{5 - \tfrac{2}{n}}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{11} - (n-1)^{11}}{n^{10}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^{n!}} \quad (a > 0), \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{1 + n^n 4^{n^2}}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n n^{2n}}{(n!)^3}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{(n!)^2}{(e\cdot n)^n}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{2^n}.$$

Esercizio 5. Verificare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k}-1\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{5^k (k!)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k+2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^3+2k+2}{3k^3-3k-3}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-3^k}{5^k-5k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1+k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^9 \cdot 9^k}{\sqrt{k!}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k - k^{\mathrm{e}}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!+2}{(k+2)!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{k}{k+2}\right)^{k^2+2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \binom{2k}{k}^{-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}\right)^2.$$