

Università degli Studi di L'Aquila
 Facoltà di Ingegneria

Analisi Matematica I (A.A. 2001/2002)

Docenti: Fabio Camilli, Klaus Engel e Corrado Lattanzio

Corsi di Laurea in: Ingegneria Ambiente e Territorio, Chimica, Civile, Elettrica, Elettronica, Informatica – Automatica, Meccanica, Telecomunicazioni

Esercizi su Calcolo Differenziale

Esercizio 1. Calcolare, utilizzando la regola di de l'Hospital oppure il teorema di Taylor, i seguenti limiti:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(x)}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\ln(1 + x^2)}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1 + \sin(x))}{\cos(x) - 1}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{\sqrt{x}} - 1)}{\ln(x^2)}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x))}{x \cdot e^x}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\ln(x + 1) - \ln(x)), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1 - \cos(x)}{x}} - 1}{\tan(x)}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(x) - \ln(1 + x)}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} - x^2 \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \right), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\frac{\sin(x)}{x}}}{x^2}, & \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + e^x)^{\frac{1}{\sin(x)}}, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 \right)^{\frac{1}{\ln(x)}}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x) - x^2}{x^4}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right), & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2(2x) + x^5)}{1 - \cos(2x)}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4}, & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \cdot \tan(x)} - \frac{1}{x^2} \right), & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^3)^{\frac{1}{x^2 \sin(2x)}}. \end{array}$$

Esercizio 2. Determinare il dominio e la derivata delle seguenti funzioni ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lllll} \sin(x)^{\tan(x)}, & x^{(a^x)}, & \arcsin\left(2^{(-x^2)}\right), & \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, & \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}\right), \\ \sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}, & x^{(x^x)}, & (\arctan(x^2))^{(x^2)}, & (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}, & \tan\left(\frac{1}{1 + e^{(x^2)}}\right), \\ \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right), & x^{(x^a)}, & \arccos\left(\sqrt{x^2 - 2}\right), & (x^a)^{(x^b)}, & \sqrt[5]{\sin^2(x) - \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}. \end{array}$$

Esercizio 3. Studiare le funzioni seguenti e tracciarne un grafico approssimativo:

$$\begin{array}{llll} e^{1/(x-3)} \cdot |x + 3|, & x \cdot \ln^2(x^2), & \ln \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}, & x \cdot e^{\frac{1}{1+\ln(x^4)}}, \\ \ln(5e^{2x} - 6e^x + 2), & \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, & \cos^2(x) - \sin(x), & \ln\left(1 + e^{\frac{x^2+1}{x}}\right), \\ \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 1}, & \frac{|x+2|^3}{(2x-1)^2}, & \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right), & e^{2x} - 2(x+3) \cdot e^x + 3(x+1)^2, \\ \frac{x}{|x-2| + |x+3|}, & x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}, & e^{\sqrt{x+6-x^2}}, & \operatorname{arccosh}\left(\frac{x(x+4)}{x-2}\right). \end{array}$$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 6x^2 + 12x - 2$.

- (a) Mostrare che la funzione f è iniettiva e suriettiva, cioè invertibile.
- (b) Determinare i punti in cui f^{-1} è derivabile e calcolare, se ha senso, $(f^{-1})'(5)$.
- (c) Calcolare un valore approssimativo dello zero di f con un errore inferiore a 2^{-3} .

Esercizio 5. Dimostrare che

- (a) $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;
- (b) $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$;
- (c) $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Esercizio 6. Calcolare per funzioni $f, g, h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili le derivate

$$(f \cdot g)'', \quad (f \cdot g)''', \quad (f \cdot g \cdot h)', \quad (f \cdot g \cdot h)''.$$

Esercizio 7. Calcolare i polinomi di Taylor di grado n con centro x_0 delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &:= e^x, && \text{per } n = 4, \quad x_0 = 2, \\ g(x) &:= x - \cos(x^2) && \text{per } n = 3, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ h(x) &:= x^2 \ln(1 + \sin(x)), && \text{per } n = 3, \quad x_0 = 0, \\ k(x) &:= \tan(x), && \text{per } n = 3, \quad x_0 = 0, \\ l(x) &:= \frac{1}{1+x}, && \text{per } n = 3, \quad x_0 = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 8.

- (a) Calcolare il polinomio di Taylor $T_2(x)$ con centro $x_0 = 1000$ e il resto $R_2(x)$ in forma di Lagrange della funzione $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
- (b) Calcolare $\sqrt[3]{1003}$ con un errore minore di 10^{-7} .

Esercizio 9. Calcolare, utilizzando la formula di Taylor, le prime tre cifre decimali di $\sin(\frac{1}{4})$, di $\cos \sqrt{\frac{1}{2}}$ e del numero di Nepero e .