

Metodi Matematici per l'Ingegneria (A.A. 2002/2003)

Corsi di Laurea in Ingegneria Chimica, Civile, Gestionale

Docenti: Corrado Lattanzio e Bruno Rubino

durata della prova: 2 ore e 30 minuti

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{12 \log((x-1)^2 + (z-1)^2)(x-1)}{(x-1)^2 + (z-1)^2}, y^3, \frac{12 \log((x-1)^2 + (z-1)^2)(zx-1)}{(x-1)^2 + (z-1)^2} \right).$$

- Determinare il dominio di \mathbb{R}^3 in cui F è definito e C^1 .
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss per la regione

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; \frac{1}{2}y - 1 \leq z \leq -\frac{1}{2}y + 1 \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, x).$$

Esercizio 3

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + te^t u_x = 3x \\ u(x, 0) = x + 3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } \rho < 1 \\ u = 3 \sin(5\theta) & \text{per } \rho = 1, \end{cases}$$

dove $u = u(\rho, \theta)$, $\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$.

Suggerimento: Le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria $x^2 y'' + xy' + y = 0$ sono della forma $y(x) = x^k$ con k da determinare...