

ANALISI MATEMATICA 3

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA CHIMICA, CIVILE, INDUSTRIALE

Docenti: Corrado Lattanzio e Bruno Rubino

durata della prova: 2 ore e 30 minuti

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + 4y^2}, \frac{4y}{x^2 + 4y^2} \right).$$

- Determinare il dominio di \mathbb{R}^2 in cui F è definito e C^1 .
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da $A = (-1, 0)$ a $B = (0, 1)$.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss per la regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, x^2, z^2).$$

Esercizio 3

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (xt + t)u_x = 4 \\ u(x, 0) = 2x. \end{cases}$$

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) = 2 \sin(x) + \sin(2x), & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$