

ANALISI MATEMATICA 3

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA CHIMICA, CIVILE, INDUSTRIALE

**Docenti: Corrado Lattanzio e Bruno Rubino**

**durata della prova: 2 ore e 30 minuti**

### Esercizio 1

Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

### Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left( \frac{6x}{3x^2 + 7y^2}, \frac{14y}{3x^2 + 7y^2} \right).$$

- Determinare il dominio di  $\mathbb{R}^2$  in cui  $F$  è definito e  $C^1$ .
- Verificare che  $F$  è irrotazionale.
- Stabilire a priori se  $F$  è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da  $A = (1, 0)$  a  $B = (1, 1)$ .

### Esercizio 3

Classificare, al variare di  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , l'equazione alle derivate parziali

$$xu_{tt} + (x^2 - t^2)u_{xx} + u_t = 0.$$

### Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & -\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi, \\ u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0, & -\pi < y < \pi, \\ u(x, -\pi) = u(x, \pi) = 0, & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$