L'Aquila, 16 dicembre 2005

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ______________________________

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Prova orale il: ______________________________

Esercizio 1

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \big((x-1)^2, -2xy, 2z\big)$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} x \cos(x) \left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{1}{2} y \sin(x) \left(e^y - e^{-y}\right) + x^2 - y^2.$$

- Verificare che u è armonica su $\mathbb{R}^2$.
- Determinare la famiglia delle armoniche coniugate di u.
- Determinare la famiglia di funzioni olomorfe di cui u è la parte reale.

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z - 4}{(z-1)^2(z-2)},$$

determinarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolare i residui in tali punti. Sviluppare quindi $f(z)$ in serie di Laurent centrata in $z_0 = 1$ e convergente in i.

Esercizio 4

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 5

Facendo uso del metodo delle caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + x\cos(t)u_x = x\cos(t) \\ u(x,0) = 2x - 3. \end{cases}$$

Esercizio 6

Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$$

estesa dispari nell'intervallo $[-\pi, 0]$ e periodica di periodo 2π.

- Disegnare il grafico di $f(x)$.
- Determinare la serie di Fourier associata ad $f(x)$.
- Studiare la convergenza puntuale e uniforme di tale serie, giustificando opportunamente le affermazioni.