

Analisi Matematica III (6 CFU)

Prova scritta: 9 gennaio 2006

Corso di studi: _____

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

Prova orale: 13 gennaio 2006 ore 9:30

Esercizio 1

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ nell'insieme $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 2\}$.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{4xz}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 1}}, \frac{yz}{\sqrt{4x^2 + y^2 - 1}}, \sqrt{4x^2 + y^2 - 1} \right).$$

- Determinare il dominio di \mathbb{R}^3 in cui F è definito e C^1 .
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2 - 1, z \leq -x^2 - y^2 + 1\}.$$

Esercizio 4

Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2 \cos x - 3}{4 \sin^2 x + \cos^2 x} dx.$$

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = 2x + y \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 5. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(x, 0) = 7 \cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right) - 5 \cos\left(\frac{7\pi}{3}x\right) & 0 < x < 3 \\ u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$