Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 24 marzo 2006

Corso di studi: ____________________________

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Prova orale: ____________________________

Esercizio 1

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z_0 = -5$ per la funzione

$$f(z) = \frac{(z+3)^3}{(z+5)^3}$$

Classificare poi z_0 e determinare il residuo di f in tale punto.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Verificare il teorema di Gauss–Green per il campo vettoriale $F(x,y) = (x^2 - 4y^2, \; x^2 + 4y^2)$ e la regione

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Esercizio 4

Sia

$$u(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} * \left(e^{-(x-1)} H(x-1)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $*$ indica la convoluzione. Calcolare la trasformata di Fourier di u.

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = (H(t-\pi) - H(t)) \cos t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$

dove H è la funzione di Heaviside.

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 6, \\ \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 6 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 6 \\ u\,(0,t) = u\,(6,t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 3, \\ 12 - 2x & \text{se } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$