

# Analisi Matematica III (6 CFU)

Prova scritta: 24 luglio 2006

Corso di studi: \_\_\_\_\_

Cognome e nome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Prova orale: \_\_\_\_\_

## Esercizio 1

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale  $F(x, y, z) = (x + y + z, y^2, z^2)$  e il dominio

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

## Esercizio 2

Calcolare l'area della  $\Gamma$  della superficie sferica di centro l'origine e raggio  $\sqrt{5}$  staccata dal cono di equazione  $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$ .

## Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = -\sin x & 0 < x < \pi, \\ u(x, \pi) = \sin(3x) & 0 < x < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

## Esercizio 4

Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{2ix}}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$$

## Esercizio 5

Dopo aver verificato che la funzione  $u(x, y) = x^2 - y^2$  è armonica nel piano  $(x, y)$ , scrivere le armoniche coniugate.

## Esercizio 6

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) = 4e^{-t}H(t) \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove  $H(\tau)$  indica la funzione di Heaviside.