Analisi Matematica III

Scritto del 12 dicembre 2006

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: ☐ 18 dicembre 2006 ☐ 9 gennaio 2007

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2x^2 - 3x + y^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale $F(x, y, z,) = (x^2, z^2 + z, 0)$ e il dominio

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 0\}.$$

Esercizio 3

Scrivere lo sviluppo di Laurent di centro 0 e convergente in 1/2 per la funzione

$$f(z) = \frac{1 + 2z}{z^2 + z^3}$$

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = -x & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = x & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x + y \\ \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

Esercizio 6

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = e^{-|t|} \sin(2\pi t).$$