Analisi Matematica III [compito A]

Scritto del 9 gennaio 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: 12 gennaio

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{e^x(x^2 - 2x + (y-1)^2)}{(x^2 + (y-1)^2)^2}, -\frac{2(y-1)e^x}{(x^2 + (y-1)^2)^2} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x = 1 - y^2 - z^2, \ 0 \le x \le \frac{1}{2} \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x, y-z, z).$$

Esercizio 3

Scrivere lo sviluppo di Laurent di centro 0 e convergente per $z = \frac{3}{2}$ della funzione

$$\frac{1}{z(z+i)(z-2)}.$$

Esercizio 4

Mediante il metodo delle curve caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + (x+1)u_x = ut^2 \\ u(x,0) = -x. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \displaystyle\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = 2\sin(2t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = 2\cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = -\cos(5x) & 0 < x < \pi \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$