

ANALISI MATEMATICA III [compito B]

Scritto del 9 gennaio 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

prova orale: 12 gennaio

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(-\frac{2e^y(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^2}, \frac{e^y((x-1)^2 + y^2 - 2y)}{((x-1)^2 + y^2)^2} \right).$$

- Determinare il dominio di \mathbb{R}^2 in cui F è definito e C^1 .
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y = 1 - x^2 - z^2, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z - x).$$

Esercizio 3

Scrivere lo sviluppo di Laurent di centro 0 e convergente per $z = -\frac{3}{2}$ della funzione

$$\frac{1}{z(z-i)(z+2)}.$$

Esercizio 4

Mediante il metodo delle curve caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + (x-1)u_x = ut^2 \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau = 2 \cos(2t) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = \cos(5x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = -2 \cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$