

ANALISI MATEMATICA III

Scritto del 20 marzo 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

prova orale: 26 marzo 2007 3 aprile 2007

Esercizio 1

Sia $u(x, y) = 2x^2 + 3x - 2y^2 - e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$.

- Verificare che u è armonica.
- Determinare la famiglia delle armoniche coniugate di u .
- Determinare la famiglia delle funzioni olomorfe $f(z)$ avente rispettivamente u e v come parte reale e immaginaria.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss per l'insieme

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y, 0 \leq z \leq 1\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (zx, zy, z^2).$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\int_{\Gamma} \frac{z \sin(z^2)}{(2z^2 + 1)^2} dz,$$

dove $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{x^4+81} \cos(x).$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 3x' + y' = t \cos(t) \\ 4x' + y' = x - t^2 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u(x, 1) = \sin(5\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & 0 < y < 1. \end{cases}$$