Analisi Matematica III

Scritto del 3 aprile 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: 11 aprile

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+2y^4+3z^6} - 6xy^3z, \frac{8y^3}{x^2+2y^4+3z^6} - 9x^2y^2z, \frac{18z^5}{x^2+2y^4+3z^6} - 3x^2y^3\right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^3$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x+y+2z=4, \; x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y,y,y)\,.$$

Esercizio 3

Utilizzando gli strumenti dell'analisi complessa, calcolare

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+3}{x(x-1)(x^2+1)}dx.$$

Esercizio 4

Mediante il metodo delle curve caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + xt^2 u_x = 3u + 1 \\ u(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' - \displaystyle\int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau = e^t - 4 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 4, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 4 \\ u\,(0,t) = u\,(4,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 1, & 2 < x < 4. \end{cases}$$