Analisi Matematica III

Scritto del 26 giugno 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: ☐ 28 giugno 2007 ☐ 18 luglio 2007

Esercizio 1

Si consideri il campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \left(-xy\sin x + y\cos x + \frac{e^x}{y},\ x\cos x - \frac{e^x}{y^2},\ \frac{1}{z^2} \right).$$

- Determinare il dominio del campo F.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo sul suo dominio.
- In caso F sia conservativo, determinarne un potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2 + z^2 = 4,\ 0 \le x \le 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(2xy,\ x^2,\ z \right).$$

Esercizio 3

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = (z^3 - 1)e^{\frac{1}{z-1}} + \frac{\sin(z-i)}{z-i},$$

- determinare le singolarità isolate di f e stabilirne la natura,
- determinare il residuo di f in $z_0 = 1$.

Esercizio 4

Usando il metodo delle caratteristiche, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + t^2 x u_x = \log|x| \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = 3\cos(t) + \sin(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili e della serie di Fourier, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < 7,\ t > 0 \\ u(x,0) = x(x-7) & 0 < x < 7 \\ u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$