

ANALISI MATEMATICA III

Scritto del 4 settembre 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

prova orale: 6 settembre 2007 19 settembre 2007

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2x^2y^2 - 2x^4}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

- Determinare il dominio di \mathbb{R}^2 in cui F è definito e C^1 .
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss (o della divergenza) per il dominio di \mathbb{R}^3

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

ed il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2 + z, 2xy, 0).$$

Esercizio 3

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2 \sin z}{z-2} + \frac{1}{z^2+4},$$

- determinare e classificare le singolarità isolate di f
- scrivere lo sviluppo di Laurent per f centrato in $z_0 = 2$ e convergente in $z = 3i$.

Esercizio 4

Risolvere (mediante il metodo delle caratteristiche) il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (x \sin t) u_x = -u + t \\ u(x, 0) = x^2 + 1. \end{cases}$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \int_0^t y(t - \tau)H(\tau) = \cos(2t) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} 16u_{xx} + 9u_{yy} = 0 & -1 < x < 1, 0 < y < 1 \\ u(-1, y) = u(1, y) = \sin(6\pi y) & 0 < y < 1 \\ u(x, 0) = u(x, 1) = 0 & -1 < x < 1. \end{cases}$$