Analisi Matematica III

Scritto del 19 settembre 2007

Durata della prova: 180 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: 21 settembre 2007

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - 3x^2 + 4x}{2\sqrt{x-1}(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y\sqrt{x-1}}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per la superficie di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 1 - x^2 - y^2, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (xz, y, 0).$$

Esercizio 3

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = z^2 e^{z-i} + \frac{1}{z+1},$$

determinarne lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z_0 = i$ e convergente in $z = -2$.

Esercizio 4

Mediante gli strumenti dell'analisi complessa, calcolare

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+4)}.$$

Esercizio 5

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - 16y'(t) = \sin(4t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 25u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x(x-1) & 0 < x < 1. \end{cases}$$