Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 5 luglio 2010

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

prova orale: ☐ 12 luglio 2010 ☐ 19 luglio 2010

Esercizio 1

Data l'equazione

$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) + e^{xy} - y\cos(x) - x^2 - 1 = 0,$$

verificare che in un intorno dell'origine si può esplicitare una variabile in funzione dell'altra. Utilizzando opportunamente la formula di Taylor della funzione implicitamente definita, verificare che l'origine è un punto stazionario per tale funzione e determinarne la natura.

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y-z}{x^2+(z-y)^2}, -\frac{x}{x^2+(z-y)^2}, \frac{x}{x^2+(z-y)^2} \right),$$

determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}^3$ su cui F è definito e di classe C^1. Verificare che F è irrotazionale in D. Stabilire a priori se F è conservativo in D. Nel caso in cui F non sia conservativo in D, restringere opportunamente il dominio D in modo che F sia conservativo sul nuovo dominio (giustificare la risposta opportunamente, ma senza svolgere calcoli matematici).

Esercizio 3

Trovare la soluzione generale dell'equazione $y'' + y' - 2y = \dfrac{e^t}{e^t+1}$

Esercizio 4

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{\pi^2}{4} & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

estesa pari a $[-\pi, 0]$ e 2π-periodica su $\mathbb{R}$. Disegnare il grafico della funzione su tutto $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier associata ad f. Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier.