Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 19 luglio 2010

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: 27 luglio 2010

Esercizio 1

Verificare la formula di Gauss-Green nel piano per il campo vettoriale $F(x,y) = (2x^3, 2x^3)$ sul dominio

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \le y \le 1 - |x|, -1 \le x \le 1 \right\}.$$

Sono richiesti l'enunciato del teorema e il disegno del dominio, opportunamente commentati.

Esercizio 2 — 8 e 11 CFU

Verificare che la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y + 1$ ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \le x \le 1, \ \sqrt{|x|} + 1 \le y \le 2\}$$

e determinarli.

Esercizio 2 — 9 CFU

Studiare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = -(x^2 - y)^2 e^{y-x}$.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2(y^2+4)t\cos(t^2) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se valgono i teoremi di esistenza ed esistenza e unicità locali.
- Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando successivamente un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni. Discutere l'esistenza globale determinando l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale della seguente serie di funzioni per $x \in [0, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1 + 8n^7 x)}{3n^2 + 2n}.$$

Studiare quindi la convergenza uniforme in $[0, M]$ per ogni $M > 0$ e in $[0, +\infty)$.
Suggerimento: per l'ultimo caso, può essere utile pensare alla condizione necessaria di convergenza...