Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 15 settembre 2010

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ____
Matricola: ____

prova orale: 21 settembre 2010

Esercizio 1

Verificare il Teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, z, 2y)$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y^2 + 4z^2 = 1, \ 0 \le x \le 1, \ z \ge 0\right\}$$

orientata verso l'alto. Sono richiesti l'enunciato del teorema e il disegno della superficie, opportunamente commentati.

Esercizio 2

Data l'equazione

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 y) + xy + \log(1 + \sin(z)) - 1 = 0,$$

verificare che in un intorno di $(0, 0, 0)$ è possibile esplicitare z in funzione delle variabili x e y. Riconoscere quindi che $(0, 0)$ è un punto stazionario della funzione $z = z(x, y)$ e, mediante la formula di Taylor della funzione z in un intorno di $(0, 0)$ arrestata al secondo ordine, riconoscere la natura (massimo, minimo, sella) di $(0, 0)$.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{7}(y^2 - 7y)\log(et) \\ y(1) = 6. \end{cases}$$

- Stabilire se valgono i teoremi di esistenza ed esistenza e unicità locali.
- Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando successivamente un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni. Discutere l'esistenza globale determinando l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}\arctan(2nx^3 + 2n^2)}{n^2 + 3n}.$$