Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 10 gennaio 2011

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ______________________________________

Matricola: ______________________________________

prova orale: ☐ 17 gennaio 2011 ☐ 25 gennaio 2011 ☐ 11 febbraio 2011

Esercizio 1

Dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{2(x-1)y}{(x-1)^2+4(y+3)^2}, \frac{8y(y+3)}{(x-1)^2+4(y+3)^2} + \log((x-1)^2+4(y+3)^2) \right),$$

determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ su cui F è definito e di classe C^1. Verificare che F è irrotazionale in D. Stabilire *a priori* se F è conservativo in D e, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali di F.

Esercizio 2 — 8 e 11 CFU

Trovare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = y^3 - y^2 - y\sin x$ nel rettangolo Q di vertici $(0,-2)$, $(\pi,-2)$, $(\pi,2)$, $(0,2)$.

Esercizio 2 — 9 CFU

Data la funzione $f(x,y) = y^3 - y^2 - y\sin x$, determinarne i punti critici e classificarli.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{3-y} \\ y(5) = 3. \end{cases}$$

- Stabilire se valgono i teoremi di esistenza e di esistenza e unicità locali.
- Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando successivamente un grafico approssimativo delle (eventuali) soluzioni. Discutere l'esistenza globale determinando l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni.

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili di Fourier, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

per

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$