

ANALISI MATEMATICA III (3, 4, 6 CFU) — A

Scritto del 10 gennaio 2011

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

prova orale: 17 gennaio 2011 25 gennaio 2011 11 febbraio 2011

Esercizio 1

Dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2(x-1)y}{(x-1)^2 + 4(y+3)^2}, \frac{8y(y+3)}{(x-1)^2 + 4(y+3)^2} + \log((x-1)^2 + 4(y+3)^2) \right),$$

determinare il più grande insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ su cui F è definito e di classe C^1 . Verificare che F è irrotazionale in D . Stabilire *a priori* se F è conservativo in D e, in caso affermativo, calcolare tutti i potenziali di F .

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili di Fourier, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

per

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Esercizio 5

Giustificando opportunamente tutte le affermazioni, calcolare il seguente integrale:

$$\oint_{\Gamma} \left[z^2 \sin\left(\frac{2}{z}\right) + \frac{z-1}{z(z^2+3)^2} \right] dz,$$

dove

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$$

percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6

Giustificando opportunamente tutte le affermazioni, calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = e^{-3|x|} \cos(4\pi x).$$

È richiesto il calcolo esplicito di eventuali trasformate "note".