Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 25 gennaio 2011

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ____
Matricola: ____

prova orale: 31 gennaio 2011

Esercizio 1

Mediante la formula dell'area (applicazione della formula di Gauss–Green sul piano), calcolare l'area della regione piana

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le y,\ x^2 + y^2 \le 9\right\}.$$

Sono richiesti l'enunciato della formula dell'area e il disegno della regione A, opportunamente commentati.

Esercizio 2

Data l'equazione

$$F(x, y, z) = \sin^2 x + \ln(1 + x + y^2 + z^2) - e^{xyz} + 1 = 0,$$

a) verificare che in un intorno di $(0, 0, 0)$ è possibile esplicitare x in funzione di y e z;

b) riconoscere che $(0, 0)$ è un punto stazionario per la funzione $x = x(y, z)$;

c) usando lo sviluppo di Taylor della funzione $x(y, z)$ arrestato al secondo ordine, calcolare il limite

$$\lim_{(y,z)\to(0,0)} \frac{x(y, z)}{y^2 + z^2}.$$

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2\sin^2(t)y = 3\cos(2t) - 3 \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

- Stabilire se valgono i teoremi di esistenza, e di esistenza e unicità locali e il teorema di esistenza globale.
- Determinare le soluzioni (o l'unica soluzione) del problema e l'intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 4

Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, +\infty)$ e in $[2, +\infty)$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = n^2 x^2 e^{-nx}.$$