Analisi Matematica II (8, 9, 11 cfu) — A

Scritto del 15 luglio 2011

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ____
Matricola: ____

prova orale: 18 luglio 2011

Per ogni esercizio consegnato/non consegnato, barrare la casella corrispondente

Esercizio 1 **consegnato** □ **non consegnato** □

Data l'equazione

$$f(x,y,z) = 3e^z - 3\cos(2xy) + \sin^2(2x+3y) - 12xy - 2z = 0,$$

verificare che in un intorno di $(0,0,0)$ è possibile esplicitare z in funzione delle variabili x e y. Riconoscere quindi che $(0,0)$ è un punto stazionario della funzione $z = z(x,y)$ e, mediante la formula di Taylor della funzione z in un intorno di $(0,0)$ arrestata al secondo ordine, riconoscere la natura (massimo, minimo, sella) di $(0,0)$.

Esercizio 2 **consegnato** □ **non consegnato** □

Verificare il teorema di Gauss per l'insieme

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 3,\ x \ge 0,\ y \ge 0\big\}$$

e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \big(0,0,2z^2\big)$. Sono richiesti il disegno dell'insieme D e l'enunciato del teorema, opportunamente commentati.

Esercizio 3 **consegnato** □ **non consegnato** □

Trovare la soluzione generale di $y'' + 4y' + 5y = 0$ e di $y'' + 4y' + 5y = \sin(t)$. Studiare quindi i problemi ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \sin(t) \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

Commentare il risultato ottenuto.

Esercizio 4 **consegnato** □ **non consegnato** □

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni per $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4 + \sin^2(nx)}{n^2 + \sin^2(n)}.$$

Per la convergenza uniforme, considerare sia il caso $x \in [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, sia il caso $x \in \mathbb{R}$.