Analisi Matematica III (6 cfu) — A

Scritto del 2 luglio 2012

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ________________________________

Matricola: ________________________________

Per le nuove modalità, svolgere gli esercizi 2, 3, 4 e rispondere alla domanda

Esercizio 1

Verificare il Teorema di Stokes per la superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1;\ y + z = 1\}$ orientata nel verso l'alto e il campo vettoriale $F(x, y, z) = (2z, x, x)$.

Sono richiesti il disegno di Σ e l'enunciato del teorema, opportunamente commentati.

Esercizio 2 [7 punti]

Mediante il metodo di Fourier della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 2\sin(x) & 0 < x < \pi \\ u(x,1) = \sin(2x) & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 < y < 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 [7 punti]

Con i metodi dell'analisi complessa (opportunamente commentanti, anche attraverso il disegno), risolvere il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{(x^2+4)(x^2+9)}dx.$$

Esercizio 4 [7 punti]

Determinare le singolarità isolate, la loro classificazione e i rispettivi residui per la funzione

$$f(z) = z\left(\frac{1}{\sin(z)} + e^{\frac{1}{z}}\right).$$

Giustificare opportunamente tutte le affermazioni.

Domanda

- Enunciare la formula di Gauss–Green sul piano, facendo riferimento ad una figura generica, opportunamente commentata. **[2 punti]**
- Dalla formula di Gauss–Green sul piano, dedurre la formula dell'area e applicarla per calcolare l'area di un cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio R generici. **[3 punti]**