Analisi Matematica III (6 cfu) — A

Scritto del 20 luglio 2012

Durata della prova: 120 minuti

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Per le nuove modalità, svolgere gli esercizi 1, 2, 3 e rispondere alla domanda

Esercizio 1 [**7 punti**]

Verificare la formula di Gauss–Green per l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \sqrt[4]{2}\right)^4 - 2 \leq y \leq 2 - \left(x - \sqrt[4]{2}\right)^4 \right\}$$

e il campo vettoriale $F(x,y) = (y^2, 1)$.

Sono richiesti il disegno di Ω e l'enunciato del teorema di Gauss–Green sul piano, opportunamente commentati.

Esercizio 2 [**7 punti**]

Mediante il metodo di Fourier della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t > 0, \end{cases}$$

dove

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{per } 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{per } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [**7 punti**]

Applicando il teorema dei residui (opportunamente commentato, anche attraverso il disegno), risolvere il seguente integrale:

$$\oint_{|z|=1} \left(\frac{e^z - 1}{z^2(8z^3 - 1)(z^3 + 4)^{10}} + z^2 \sin\left(\frac{2}{z}\right) \right) dz,$$

dove la curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ è percorsa in senso antiorario.

Esercizio 4

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^4 + 9}.$$

Giustificare opportunamente tutte le affermazioni.

Domanda

- Enunciare la definizione di trasformata di Fourier per opportune funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. [**2 punti**]
- Enunciare e dimostrare la formula per la trasformata di Fourier della derivata di una funzione, sotto opportune condizioni per la funzione stessa. [**3 punti**]