

ANALISI NUMERICA E COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Prova di variabile complessa

11 settembre 2014

Durata della prova: 90 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

e-mail: _____

Esercizio 1 [12 punti]

Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^3 - 1},$$

determinarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolare i residui in tali punti. Sviluppare quindi $f(z)$ in serie di Laurent centrata in $z_0 = 0$ e convergente in $2i$. Giustificare opportunamente tutte le affermazioni.

Esercizio 2 [12 punti]

Dopo aver enunciato i relativi teoremi e averne dato un cenno di dimostrazione, utilizzare opportunamente le formule di Cauchy per calcolare

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-i)^3} dz,$$

dove $\Gamma \subset \mathbb{C}$ è la circonferenza di centro 0 e raggio 3.

Domanda [4 punti]

Enunciare la definizione di funzione olomorfa e successivamente enunciare il teorema sulle condizioni di Cauchy–Riemann, dandone un cenno di dimostrazione. Giustificare opportunamente tutte le affermazioni.

Risposta

ANALISI NUMERICA E COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Prova di analisi numerica

11 settembre 2014

Durata della prova: 90 minuti

Cognome e nome: _____

Matricola: _____

e-mail: _____

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) - y(x) = (x-2)e^{-x} - \ln(x) + 1, & x \in (1, e], \\ y(1) = e^{-1} - 1, \quad y'(1) = -y(1). \end{cases}$$

1. Si dica, motivando la risposta, se il problema dato è ben posto.
2. Si costruisca un file Matlab: `Cognome_studente_matricola.m` che, una volta avviato:
 - faccia visualizzare una schermata con i dati personali ed una breve presentazione del problema;
 - determini la soluzione approssimata utilizzando il metodo di *Heun* con passi $h1 = (e - 1)/20$ e $h2 = (e - 1)/160$;
 - sapendo che la soluzione analitica è $y(x) = \ln(x) + e^{-x} - 1$, calcoli l'errore assoluto nei nodi comuni nei due casi;
 - faccia visualizzare una tabella riassuntiva in cui si riporti:

x	sol_h1	sol_h2	err_h1	err_2
---	--------	--------	--------	-------

dove **x** è il vettore colonna dei nodi comuni alle due partizioni dell'intervallo $[1, e]$ relative a $h1$ e $h2$, **sol_h1**, **sol_h2** ed **err_h1**, **err_h2** sono rispettivamente le soluzioni approssimate e gli errori corrispondenti ottenuti nei due casi. Si utilizzino formati di stampa opportuni.
3. Si costruisca una figura con due finestre su due righe; nella prima si riporti la soluzione analitica e nella seconda la soluzione approssimata ottenuta con l'approssimazione migliore. Si corredino le figure di label e titolo.
4. Si commentino i risultati e si specifichi se essi soddisfano le aspettative teoriche.