Laurea Magistrale in Matematica – a.a. 2012/13

Analisi Superiore I – F0069 – 12 CFU

Docente responsabile: D. Amadori

Altri docenti: D. Donatelli, C. Lattanzio, C. Pignotti

1. **Teoria della misura.** Definizione di misura, esempi e proprietà. Continuità della misura e monotonia rispetto all'inclusione. Insiemi di misura nulla, completamento di una σ–algebra. Misura esterna. Insiemi misurabili secondo Caratheodory, teorema di Caratheodory. Richiami sulla misura di Lebesgue.

   Funzioni misurabili e loro proprietà. Approssimazione di funzioni misurabili tramite funzioni semplici. Integrale di una funzione misurabile non negativa e sue proprietà. Integrale per funzioni misurabili a segno non costante.

   Teoremi di passaggio al limite sotto al segno di integrale: teorema di convergenza monotona, lemma di Fatou, teorema di convergenza dominata. Applicazioni alle serie di funzioni. Misure positive generate da integrali. Richiami su spazi L^p, principali proprietà. Inclusioni fra spazi L^p. Teorema di Kolmogorov–Riesz–Fréchet.

   Confronto fra misure: misure assolutamente continue e misure mutualmente singolari. Il teorema di Radon–Nikodym. Misure con segno: definizione, esempi, proprietà. Decomposizione di Lebesgue di misure, teorema di Lebesgue.

2. **Distribuzioni.** Funzioni localmente sommabili. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$. Distribuzioni. Distribuzioni associate a funzioni localmente sommabili. Distribuzioni singolari. Esempi. Operazioni sulle distribuzioni: somma, prodotto per una funzione, cambio di variabile, restrizione, prodotto tensoriale. Ordine di una distribuzione. Derivazione e proprietà. Confronto con le derivate classiche. Derivazione di funzioni di salto. Partizione dell'unità. Supporto di una distribuzione. Distribuzioni a supporto compatto.

3. **Convoluzione.** Convoluzione negli spazi L^p. Regolarità della convoluzione. Successioni regolarizzanti. Regolarizzazione mediante convoluzione. Convoluzione tra distribuzioni. Regolarizzazione di distribuzioni. Densità di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

4. **Funzioni BV e AC.** Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue. Proprietà ed esempi. Teorema fondamentale del calcolo.

5. **Trasformata di Fourier.** Lo spazio $S(\Omega)$ delle funzioni rapidamente decrescenti e sue proprietà. Definzione di Trasformata di Fourier su $S(\Omega)$ e sue proprietà. Trasformata inversa. Estensione della trasformata di Fourier su L^1 e L^2: Teorema di Riemann-Lebesgue e Teorema di Plancherel. Teorema di Hausdorff-Young. Trasformata di funzioni analitiche: Teorema di Paley Wiener. Lo spazio $S'(\Omega)$ delle distribuzioni temperate e sue proprietà. La trasformata di Fourier su $S'(\Omega)$. Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni alle derivate parziali. Soluzioni fondamentali mediante trasformata di Fourier. Teorema di Malgrange–Ehrenpreis (senza dimostrazione). Applicazione della trasformata di Fourier agli spazi di Sobolev: definizione dello spazio H^s, $s \in \mathbb{R}$, teorema di immersione e di traccia.

6. **Spazi di Sobolev.** Definizione di derivate deboli e motivazione. Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e loro proprietà. Approssimazione locale e globale degli Spazi di Sobolev. Teorema di Estensione. Teoremi di Immersione: Disuguaglianza di Gagliardo– Nirenberg–Sobolev e Teorema di immersione nel caso $p < n$. Teorema di immersione nel caso $p = n$. Spazi di Hölder. Disuguaglianza di Morrey. Teorema di immersione nel caso $p > n$. Disuguaglianze di Sobolev nel caso generale (senza dim.) Immersioni compatte: Teorema di Rellich–Kondrachov, esempi e contro esempi. Disuguaglianza di Poincaré di Poincaré–Wirtinger. Spazi di Sobolev $W^{s,p}$, con $s \in \mathbb{R}$. Caratterizzazione degli spazi duali (dimostrazione nel caso di H^k). Teorema di traccia e applicazioni. Relazione tra $W^{1,}(\Omega)$ e funzioni lipschitziane (senza dimostrazione).

7. **Equazioni ellittiche di secondo ordine.** Il teorema di Lax–Milgram. Equazioni lineari uniformemente ellittiche: definizione di soluzione debole; esempi. Esistenza e unicità di soluzioni deboli per equazioni lineari ellittiche: applicazione del teorema di Lax–Milgram e dell'alternativa di Fredholm.

8. **Equazioni paraboliche di secondo ordine.** Definizione di operatore parabolico. Soluzioni deboli per equazioni paraboliche lineari. Esistenza di soluzioni deboli: approssimazione di Galerkin, costruzione di soluzioni approssimanti, stime di energia, esistenza ed unicità di soluzioni. Esistenza della soluzione della legge di conservazione viscosa con termine di viscosità.

9. **Equazioni iperboliche nonlineari del primo ordine.** Definizione di sistema iperbolico. Sistemi iperbolici quasilineari, simmetrici. Esistenza di soluzioni deboli: approssimazione di soluzioni mediante regolarizzazione, stime a priori, esistenza ed unicità di soluzioni regolari. Sistemi iperbolici simmetrizzabili: esistenza di soluzioni regolari.

   Leggi di conservazione scalari. Derivazione, esempi. Soluzioni deboli, condizioni di Rankine-Hugoniot, condizioni di entropia. Stabilità L^1, unicità e confronto per soluzioni deboli entropiche. Convergenza della "vanishing viscosity" ed esistenza della soluzione debole entropica. Il problema di Riemann.

Testi consigliati

- W. Rudin, Real and complex analysis
- G. Gilardi, Analisi 3, McGraw-Hill.
- S. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics: II Fourier Analysis, self-adjointness,
- L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS.
- M.E. Taylor, Partial Differential Equations, Nonlinear equations, vol. 3, Springer.
- J. Rauch, Partial Differential Equations, Springer.
- C.M. Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Springer.