TEORIA DEI SISTEMI

Prof. C. Manes, Dott. V. De Iuliis

Compito d'esame dell'11-6-2024

Problema 1. (8 punti) Si consideri un sistema di controllo a feedback unitario, caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento in catena diretta:

$$W_{AP}(s) = \frac{K}{(s^2+1)(s-5)}.$$

1. Se ne disegnino i diagrammi di Bode e il diagramma polare per $K = 1$;
2. si calcoli il denominatore della funzione di trasferimento a ciclo chiuso;
3. si calcoli il numero di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a ciclo chiuso al variare di $K \in (-\infty, +\infty)$ utilizzando sia il criterio di Routh che il criterio di Nyquist.

Problema 2. (7 punti) Sia dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\pi^2}{4} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Si discutano le proprietà di stabilità, osservabilità ed eccitabilità dei modi naturali;
2. si calcoli la matrice di transizione dello stato;
3. si calcolino la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento ingresso-uscita.

Problema 3. (4 punti) Sia dato un sistema a tempo continuo ad un ingresso ed un'uscita caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$w(t) = 2e^{-2t} + 3e^{-3t}.$$

Si calcolino la risposta forzata al gradino unitario e, se esiste, la risposta a regime permanente all'ingresso $u(t) = 2\sin(t)$.

Problema 4. (6 punti) Si consideri il sistema lineare e stazionario a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Si trovino delle basi per lo spazio degli stati raggiungibili e per lo spazio degli stati inosservabili;
2. si individuino i 4 sottospazi $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{X}_3$ e $\mathcal{X}_4$ della decomposizione strutturale di Kalman;
3. si determinino le proprietà degli stati individuati dai vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Problema 5. (5 punti) Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - \big(x_2(t)+1\big)^2 \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)\big(x_2(t)+1\big) + k\big(x_2(t)+1\big). \end{cases}$$

Si verifichi che $x_e = (0, -1)$ sia un punto d'equilibrio per il sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in (-\infty, \infty)$ utilizzando il metodo della linearizzazione attorno al punto di equilibrio e, se necessario, il metodo di Lyapunov. (*Suggerimento: si utilizzi una funzione quadratica.*)

Tempo a disposizione: 2 ore e mezza.
