CdL in Matematica - A.A. 2018-2019

Compito di Analisi Matematica B

12 giugno 2019

Esercizio 1

Data la seguente funzione definita in $\mathbb{R}^2$ da

$$f(x,y) = \begin{cases} |x+y|\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1a) Dire se la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$.

1b) Studiare l'esistenza delle derivate parziali in $\mathbb{R}^2$.

1c) Studiare la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2

Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $F(x,y,z) = (2x, xz, y^2)$, calcolare il flusso di F e di $\operatorname{rot}(F)$ uscente dalla superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+z^2 = \frac{y^2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |y| \leq 2\right\}.$$

Esercizio 3

Stabilire gli insiemi di convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{e^{\sqrt{n}x}}{n}\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4

Data la seguente equazione

$$f(x,y,z) = \log(1+\sin z) + ze^{x+y} - \cos y + x^2 + 1 = 0,$$

verificare che definisce in un intorno di $(0,0,0)$ un'unica funzione $z = g(x,y)$. Inoltre

4a) scrivere lo sviluppo al primo e al secondo ordine di $z = g(x,y)$,

4b) scrivere la matrice Hessiana di $g(x,y)$ in $(0,0)$,

4c) stabilire se il punto $(0,0)$ è di massimo o di minimo per la funzione $z = g(x,y)$.