III Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica
10 gennaio 2019

Esercizio 1. Si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - 6x_1 + 8x_2 + 8 = 0$$

(a) Determinare il tipo di quadrica. Se si tratta di quadrica a centro trovare le coordinate del centro.
(b) Scrivere la forma canonica metrica di $\mathcal{Q}$.
(c) Sia $q(x_1, x_2, x_3)$ la forma quadratica associata alla quadrica $\mathcal{Q}$. Determinare la segnatura e la forma di Sylvester di $q(x_1, x_2, x_3)$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una forma canonica di Jordan di M.
(b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto alla quale la matrice M è nella forma canonica di Jordan trovata.

II Verifica di Geometria A
Corso di Laurea in Matematica - Corso di Laurea in Fisica
10 dicembre 2018

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalle seguenti condizioni:

- f ha un autovalore $\lambda = 3$ con relativo autovettore $v = e_1 - e_2$,
- $f(u) = e_1 - 3e_2 + e_3$ e $f^2(u) = -3e_1 + e_2 + e_3$ con $u = e_1 - e_2 + e_3$.

(a) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.

(b) Stabilire se f è diagonalizzabile. In caso di risposta positiva trovare una matrice invertibile C tale che base $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio $M_2(\mathbb{R})$ munito del seguente prodotto scalare

$$< A, B >:= Tr({}^tB \cdot A).$$

(a) Dire se la seguente base di $M_2(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

è ortogonale. In caso contrario ortogonalizzarla.

(b) Sia U il sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato da $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare $U^\perp$, il complemento ortogonale di U.

(c) Scrivere $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ come somma di un vettore di U e di un vettore di $U^\perp$,.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ si considerino le rette $r_1 : x + y - 1 = 0$ e $r_2 : x - y + 3 = 0$.

(a) Scrivere l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente alla retta r_1 nel punto $P = (1, 0)$ e alla retta r_2 nel punto $Q = (-3, 0)$ e passante per il punto $A = (1, -2)$. Determinare il tipo di conica.

(b) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.

(c) Determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ nella forma canonica determinata.

I VERIFICA DI GEOMETRIA A
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA - CORSO DI LAUREA IN FISICA
5 NOVEMBRE 2018

ESERCIZIO 1. Si consideri il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x + hy + hz = 2h \\ hx + y + hz = 2 \\ hx + hy + z = 2h \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.
Determinare, se esistono, valori del parametro $h \in \mathbb{R}$, per i quali il sistema è compatibile e in caso di sistema compatibile trovare la(e) soluzione(i) del sistema.

ESERCIZIO 2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 e sia

$$U = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(-1) = 0\}.$$

(a) Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di V e determinarne una base.
(b) Sia W il sottospazio generato da $\{x^2 - 1, x^3 - x\}$. Calcolare la dimensione e una base di $U \cap W$ e la dimensione e una base di $U + W$

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il punto $A = (1, -1, 1)$.
(a) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A, parallela al piano $\alpha : 2x + y - z + 1 = 0$ incidente la retta $s : x - z - 1 = y - 2z - 3 = 0$.
(b) Determinare l'angolo convesso tra la retta r e il piano $\beta : x + y - z - 3 = 0$.
(c) Determinare la distanza del punto $P = (1, 2, 0)$ dalla retta s e il punto $Q \in s$ piú vicino a P.