

PROCESSI STOCASTICI 1 (7-02-2018)

TEMPO DISPONIBILE 3 ORE

L'uso di libri ed appunti e' proibito. Scrivere nome cognome ed indirizzo e-mail sui fogli che si consegnano.

1) Siano (ξ, η) due variabili casuali con distribuzione congiunta data dalla densita' uniforme su $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$. Calcolare $\mathbb{E}(\xi^2 \eta^3 | \eta)$.

2) Trasformazioni che preservano la proprieta' di martingala

3) Siano η_i variabili casuali i.i.d. che assumono i valori ± 1 con uguale probabilita'. Sia f una funzione tale che $\sum_{i=1}^{+\infty} f(i) < +\infty$. Dimostrare che $\xi_n = \sum_{i=1}^n f(i) \eta_i$ e' una martingala uniformemente integrabile. Calcolare $\mathbb{E}(\xi_n^2)$. Sia $\tau = \inf\{n : \eta_n = +1\}$. Calcolare $\mathbb{E}(\xi_\tau)$.

4) Sia N un processo di Poisson di parametro 1 e sia $f(x) = x^2$. Calcolare $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(1)} f(\xi_i)\right]$, dove ξ_i e' la variabile casuale associata all'iesimo tempo di arrivo.

5) Il processo di Poisson