

PROCESSI STOCASTICI 1 (7-02-2018)

TEMPO DISPONIBILE 3 ORE

L'uso di libri ed appunti e' proibito. Scrivere nome cognome ed indirizzo e-mail sui fogli che si consegnano.

1) Dare un esempio di applicazione dei lemmi di Borel Cantelli; un esempio di Martingala e stopping time per i quali non valga il Teorema dell'arresto opzionale ed infine un esempio di una sequenza di variabili casuali uniformemente integrabili.

2) Il Teorema di convergenza per martingale

3) Siano η_i variabili casuali i.i.d. che assumono i valori ± 1 con uguale probabilita. Sia f una generica funzione. Si determini sotto quale condizione la sequenza $\xi_n = \sum_{i=1}^n f(\eta_i)$ e' una martingala. Sotto questa condizione sia $\tau = \inf\{n : \eta_n = +1\}$. Calcolare $\mathbb{E}(\xi_\tau)$.

Determinare sotto quale condizione ξ_n e' una submartingala. In questo secondo caso se ne determini la decomposizione di Doob.

4) Sia N un processo di Poisson di parametro 1. Calcolare la probabilita che $N(1)$ sia pari. Calcolare $\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(1)} e^{\xi_i} \right]$, dove ξ_i e' la variabile casuale associata all'iesimo tempo di arrivo.

5) Si dia la definizione di valore di aspettazione condizionato rispetto ad una sigma algebra e se ne dimostri l'unicita quasi ovunque.