

CALCOLO DELLE PROBABILITA E STATISTICA (7-02-2018)

TEMPO DISPONIBILE 2 ORE E 30 MINUTI

L'uso di libri ed appunti e' proibito. Scrivere nome cognome ed indirizzo e-mail sui fogli che si consegnano. Svolgere la parte di Probabilita (i primi 4 esercizi) e la parte di statistica (i rimanenti 3) su fogli separati.

1) La probabilita condizionata, proprieta ed esempi.

2) Siano X_1, X_2, X_3 variabili casuali i.i.d. di Bernoulli di parametro $\frac{4}{5}$. Calcolare $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = 2)$, $\mathbb{E}(3X_1^2X_2 + X_3)$, disegnare il grafico della funzione di ripartizione della variabile casuale $3X_2 + 1$.

3) Siano X_i variabili casuali i.i.d. di Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$. Trovare p ed n^* tali che

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - p\right| > \frac{1}{20}\right) \leq \frac{1}{100}$$

per ogni $n > n^*$.

4) Un sacchetto contiene 6 palline numerate dall'uno al 6. Se ne estraggono 2 uniformemente senza rimpiazzo. Calcolare la probabilita che la seconda pallina estratta abbia un numero maggiore della prima. Calcolare la probabilita che la prima pallina estratta abbia un numero pari sapendo che la seconda estratta ha un numero dispari.

Calcolare le stesse probabilita nel caso di estrazioni con rimpiazzo.

5) Sia X_1, X_2, X_3 un campione casuale estratto da una popolazione Normale con media incognita μ e varianza nota pari ad 1. Si scriva la funzione di verosimiglianza $L(\mu)$ nel caso in cui il campione osservato sia $(0,0,0)$.

6) Sia $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$ un campione casuale estratto da una popolazione Normale con media incognita μ e varianza nota pari ad 4. Sapendo che $\bar{x}_9 = 9$, determinare un intervallo di confidenza al livello di significativita' del 95% per μ .

7) Sia X_1, X_2, \dots, X_n un campione casuale estratto da una popolazione con funzione di densita' $f(x, \theta)$ caratterizzata dal parametro incognito θ . Si consideri lo stimatore $\hat{\theta}$ del parametro θ . Dimostrare che l'errore quadratico medio dello stimatore $\hat{\theta}$ e' dato dalla somma della varianza dello stimatore e della sua distorsione al quadrato.