

Cognome Nome

Matricola Corso di Laurea.....

Domanda 1

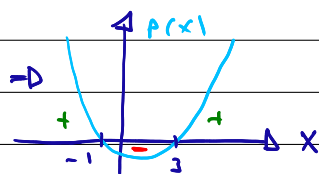
[4 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

(i) Enunciare il test di monotonia per le funzioni derivabili.

(ii) Trovare gli intervalli di crescita della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i) Se $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora• f è crescente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ • f è decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ (ii) • $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3 \cdot (x^2 - 2x - 3) =: p(x)$ • $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix}$  $\Rightarrow f$ è crescente in $(-\infty, -1)$ e $(3, +\infty)$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una successione numerica $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.(ii) Dare l'esempio di una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente al limite $l = e$.

Risposta

(i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al limite $l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|l - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ (ii) P.e. se $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = e$$

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos(x) - \sinh(x)}{x \cdot \ln(1 - x^2)}$$

Risoluzione

$$\begin{aligned} \bullet \ln(1+t) &\sim t \text{ per } t \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1-x^2) \sim -x^2 \text{ per } x \rightarrow 0 \\ \Rightarrow x \cdot \ln(1-x^2) &\sim x \cdot (-x^2) = -x^3 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 3° ordine:

$$\bullet \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \Rightarrow x \cdot \cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\bullet \sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot \cos(x) - \sinh(x) &= x - \frac{x^3}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{4}{6}x^3 + o(x^3) \\ &\sim -\frac{2}{3}x^3 \text{ per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^3}{-x^3} = \underline{\underline{2/3}}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x^{-1}) dx$$

Risoluzione

$$\bullet I = \lim_{a \rightarrow 0^+} - \int_a^1 x \cdot \ln(x) dx$$

$\bullet$ Usando integrazione per parti

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln(x) dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^1 x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx = - \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} \right]_a^1$$

$$= - \left(\frac{1^2}{2} \cdot \ln(1) - \frac{1^2}{4} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= - \left(-\frac{1}{4} - \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) + \frac{a^2}{4} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} \text{ per } a \rightarrow 0^+$$

$$\text{Quindi } \underline{\underline{I = \frac{1}{4}}}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(4, 1)$ per la funzione $f(x, y) = \sqrt{\frac{2x+y}{y}}$ e il versore $v = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Risoluzione

$$\bullet D_v f(4, 1) = f_x(4, 1) \cdot \frac{4}{5} + f_y(4, 1) \cdot \frac{3}{5}$$

$$\bullet f_x(x, y) = \frac{1}{2} (2x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f_x(4, 1) = (2 \cdot 4 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\bullet f_y = \frac{1}{2} \cdot (2x+y)^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} + (2x+y)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot y^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f_y(4, 1) = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 4 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1)^{-\frac{1}{2}} + (2 \cdot 4 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow D_v f(4, 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4-12}{15} = -\frac{8}{15}$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 - \sin(y))}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Risoluzione

$$\bullet \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(0)) \cdot (1 - \sin(y))}{2 \cdot y^2} = 0 \neq \frac{1}{2} = f(0, 0)$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0, 0) \Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0, 0)$

$$\bullet f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot (1 - \sin(0))}{x^2 + 2 \cdot 0^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x) \cdot 2}{x^2 \cdot 2} - \frac{1 \cdot x^2}{2x \cdot x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x) - x^2}{2x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{2x^3} = 0$$

$$\bullet f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{1}{2}}{y} \text{ non converge}$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0, 0)$ rispetto a x con $f_x(0, 0) = 0$

f non è derivabile in $(0, 0)$ rispetto a y .

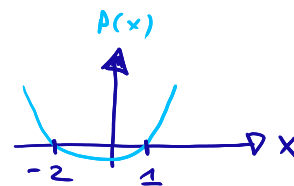
Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x^2}\right)$$

e tracciarne un grafico approssimativo.



Risoluzione

Domínio X: $x \in X \Leftrightarrow x \neq 0$ e $\frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ e $p(x) > 0$
 $\Leftrightarrow x < -2$ opp. $x > 1$, quindi $X = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

asintoti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$
 $\Rightarrow y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \ln\left(\frac{0^+}{(-2)^2}\right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{0^+}{1^2}\right) = -\infty$
 $\Rightarrow x = -2$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.

estremi locali: $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{x^2 \cdot (2x+1) - 2x \cdot (x^2 + x - 2)}{(x^2)^2}$
 $= \frac{1}{x^2 + x - 2} \cdot \frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 + 4x}{x^2}$
 $= \frac{-x^2 + 4x}{x^2 \cdot (x^2 + x - 2)} = \frac{-x + 4}{x \cdot (x^2 + x - 2)} = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$. Quindi $x = 4$ è l'unico candidato per un punto di estremo locale. Inoltre, il denominatore $x \cdot (x^2 + x - 2)$ in $x = 4$ è $4 \cdot (4^2 + 4 - 2) > 0$ e il numeratore in $x = 4$ cambia segno da "+" a "-". Quindi $f'(x)$ cambia segno in 4 da "+" a "-" $\Rightarrow x = 4$ è un pto. di massimo locale.

Grafico:

