Analisi Matematica 1, Scritto B. Durata della prova: 2 ore 10.01.2019

Firma: ....

Cognome .... **Nome** .... **A.A.** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente.

(ii) Dare un esempio di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -9$.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente se $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) P.e. per $a_n := \frac{-9n}{n+1}$ segue $\lim_{n\to+\infty} a_n = -9$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Trovare un punto c del teorema della media integrale per la funzione $f(x) = x^5$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Risposta

(i)

cfr. compito A

(ii) f è continua su $[1,2]$. Inoltre vale

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{x^6}{6}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}\cdot[2^6 - 1^6] = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} f(c) = c^5 \Rightarrow c = \sqrt[5]{\frac{21}{2}}$$

Esercizio 1

[5 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{27+n^6}{89+n^4+n^7}$$ $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

serie a termini positivi

Risoluzione

Per il principio di sostituzione vale

$a_n \sim \frac{n^6}{n^7} = \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$. Quindi per il criterio del confronto asintotico S e la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ hanno lo stesso carattere. Quindi anche

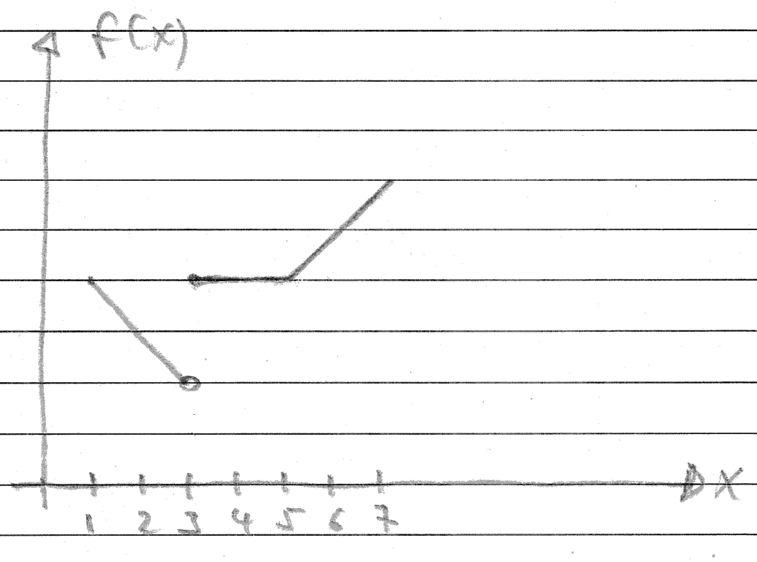
S diverge a $+\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$ con $f'(2) = -1$, non continua in $x = 3$, con $f'(4) = 0$, con un punto angoloso in $x = 5$ e con $f'(6) = 1$.

Risoluzione



Esercizio 3 [5 punti]

Trovare il piano tangente in $(3,1)$ alla funzione $f(x,y) = 7 + x^2y^5$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(3,1) + f_x(3,1)\cdot(x-3) + f_y(3,1)\cdot(y-1)$
- $f(3,1) = 7+3^2\cdot 1^5 = 7+9 = \underline{16}$
- $f_x(x,y) = 2x\cdot y^5 \Rightarrow f_x(3,1) = 2\cdot 3\cdot 1^5 = \underline{6}$
- $f_y(x,y) = x^2\cdot 5\cdot y^4 \Rightarrow f_y(3,1) = 3^2\cdot 5\cdot 1^4 = 9\cdot 5 = \underline{45}$

Quindi

$$p(x,y) = 16 + 6\cdot(x-3) + 45\cdot(y-1)$$

Esercizio 4 [4 punti]

Studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6\cdot(\sin(x))^8}{x^{14}+y^{14}} =: f(x,y)$$

Risoluzione

Poniamo $y = mx$. Allora

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^6\cdot x^6\cdot \sin^8(x)}{x^{14}+m^{14}\cdot x^{14}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^6}{1+m^{14}}\cdot\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^8$$

$$= \frac{m^6}{1+m^{14}} \text{ cioè dipende da } m \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ __non__ esiste.

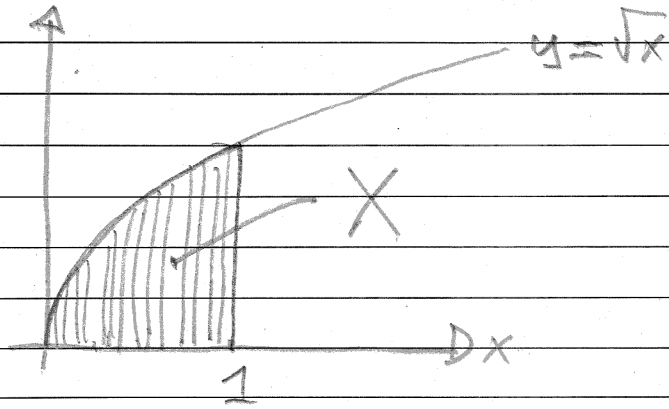
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Calcolare l'integrale

$$I := \iint_X \underbrace{20x^3y}_{=:\, f(x,y)}\, dx\, dy.$$

Risoluzione



X è y-semplice e f è continua

Quindi per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} 20\, x^3 \cdot y \, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \cancel{20}^{\,10} \cdot x^3 \cdot \frac{y^2}{\cancel{2}} \Big|_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 10 \cdot x^3 \cdot \left((\sqrt{x})^2 - 0^2 \right) dx$$

$$= 10 \cdot \int_0^1 x^4\, dx$$

$$= \frac{\cancel{10}^{\,2}}{\cancel{5}}\, x^5 \Big|_0^1 = 2 \cdot (1^5 - 0^5) = \underline{\underline{2}}$$