Analisi Matematica 1. Durata della prova: 2 ore **13.1.26**

Firma: ....

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea:** Informatica

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di continuità di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Studiare la continuità in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1} \cdot \ln(1+x^2) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Risposta

(i) f è continua in x_0 se $\forall$ successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Oppure: se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x\cdot x}}^{\to 1} \cdot \overbrace{x}^{\to 0} = 1 \cdot 0 = 0 = f(0)$

Quindi f è continua in $x_0 = 0$.

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Lagrange.

(ii) Calcolare i punti di Lagrange della funzione $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x + \sin(x)$.

Risposta

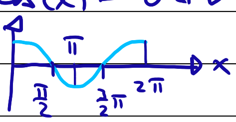
(i) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in (a,b), allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(ii)
- f è derivabile in $[a,b]$
- $f(0) = 0 + \sin(0) = 0$, $f(2\pi) = 2\pi + \overbrace{\sin(2\pi)}^{=0} = 2\pi \Rightarrow$

  $\frac{f(2\pi)-f(0)}{2\pi - 0} = \frac{2\pi - 0}{2\pi - 0} = 1$
- $f'(x) = 1 + \cos(x) \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ opp. $x = \frac{3}{2}\pi$

Quindi $c_1 = \pi/2$ e $c_2 = \frac{3}{2}\pi$



Esercizio 1 [5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x^3)} =: \ell$$

Risoluzione

Con Taylor: Denominatore $\ln(1+x^3) \sim x^3$ per $x \to 0$

Quindi il numeratore è da sviluppare fino al 3° ordine:

$$e^x - \cos(x) - \sin(x) - x^2 = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + \left(-\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}\right) + \left(-\cancel{x} + \frac{x^3}{6}\right) - \cancel{x^2} + o(x^3)$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) x^3 + o(x^3) = \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}\cdot x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0}\right) = 1/3$$

Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare l'integrale

$$I := \int_0^1 \underbrace{(2x-1)}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'}\, dx$$

Risoluzione

Usando integrazione per parti segue

$$I = [\underbrace{(2x-1)}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g}]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g}\, dx$$

$$= (2\cdot 1 - 1)\cdot e^1 - (2\cdot 0 - 1)\cdot \underbrace{e^0}_{=1} - 2\int_0^1 e^x\, dx$$

$$= e + 1 - 2\cdot [e^x]_0^1 = e + 1 - 2\cdot(e^1 - \underbrace{e^0}_{=1})$$

$$= e + 1 - 2e + 2 = 3 - e$$

Esercizio 3 **[4 punti]**

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \dfrac{2x-y}{2-x^2}$ nel punto $(x_0,y_0) = (2,1)$.

Risoluzione

- $p(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$

- $f(x_0,y_0) = \dfrac{2\cdot 2-1}{2-2^2} = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$

- $f_x(x,y) = \dfrac{(2-x^2)\cdot 2 + (+2x)\cdot(2x-y)}{(2-x^2)^2} \Rightarrow f_x(x_0,y_0) = \dfrac{\overbrace{(2-2^2)\cdot 2}^{=-4} + \overbrace{2\cdot 2\cdot(2\cdot 2-1)}^{=12}}{\underbrace{(2-2^2)^2}_{=4}}$

$= \dfrac{8}{4} = 2$

- $f_y(x,y) = \dfrac{-1}{2-x^2} \Rightarrow f_y(x_0,y_0) = \dfrac{-1}{2-2^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{p(x,y) = -\dfrac{3}{2} + 2\cdot(x-2) + \dfrac{1}{2}\cdot(y-1)}}$

Esercizio 4 **[4 punti]**

Studiare la derivabilità parziale in $(x_0,y_0) = (0,0)$ della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = |2x+1|\cdot|y|$$

Risoluzione

Si devono studiare i limiti dei rapporti incrementali:

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{|2h+1|\cdot|0| - |2\cdot 0+1|\cdot|0|}^{=0}}{h} = 0 = f_x(0,0)$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\overbrace{|2\cdot 0+1|\cdot|h|}^{=|h|} - \overbrace{|2\cdot 0+1|\cdot|0|}^{=0}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ non converge

$\Rightarrow$ f è derivabile in $(x_0,y_0) = (0,0)$ rispetto ad x ma non rispetto ad y.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio X: $x \in X \iff x+1 \neq 0 \iff x \neq -1$ quindi $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Zeri: $f(x) = 0 \iff x^2 - x = x\cdot(x-1) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = 1$

Asintoti: verticali: $\lim_{x \to -1^\pm} f(x) = \frac{(-1)^2 - (-1)}{0^\pm} = \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty$

$\Rightarrow x = -1$ è un asintoto verticale

orizzontali/obliqui: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{x^2-x}^{\sim x^2}}{\underbrace{x+1}_{\sim x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \overbrace{\frac{x^2}{x}}^{=x} = \pm\infty$

$\Rightarrow$ possibilità di asintoti obliqui.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{(x^2-x)}^{\sim x^2}}{\underbrace{(x+1)\cdot x}_{\sim x^2}} = 1 =: m$

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+1} - \overbrace{x \cdot \frac{x+1}{x+1}}^{=x^2+x} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overbrace{\cancel{x^2} - x - \cancel{x^2} - x}^{=-2x}}{\underbrace{x+1}_{\sim x}} = -2$

$\Rightarrow y = x - 2$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Estremi locali: Gli unici candidati per i punti di estremo locale sono i punti critici.

$f'(x) = \frac{\overbrace{(x+1)\cdot(2x-1)}^{=2x^2+2x-x-1} - 1\cdot(x^2-x)}{(x+1)^2} = \frac{\overbrace{x^2+2x-1}^{=:p(x)}}{\underbrace{(x+1)^2}_{>0\ \forall x \in X}} = 0 \iff p(x) = 0$

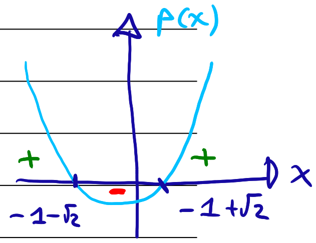
$\iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2+4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-2\pm 2\cdot\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Inoltre vale segno $f'(x)$ = segno $p(x)$, quindi

$f'(x)$ cambia segno in

$x = -1-\sqrt{2}$ da "+" a "−" $\Rightarrow x = -1-\sqrt{2}$ è un pto. di max locale

$x = -1+\sqrt{2}$ da "−" a "+" $\Rightarrow x = -1+\sqrt{2}$ è un pto. di min. locale



f: ↗ ↘ ↗

Grafico: