

Cognome Nome

Matricola Corso di Laurea

Domanda 1

[4 punti]

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

- (i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- (ii) Dire per quale $q \in \mathbb{R}$ e a quale somma s converge la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$

Risposta

- (i) Sia $S_n := a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge alla somma $s \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = s.$$

- (ii) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$

e in questo caso $s = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Domanda 2

[4 punti]

- (i) Enunciare il teorema di Rolle.
- (ii) Verificare che la funzione $f(x) := 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x + 1$ ammette almeno un punto critico nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$

Risposta

- (i) Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b) .

Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = 0$$

- (ii) • f è continua in $[\frac{1}{2}, 1]$ e derivabile in $(\frac{1}{2}, 1)$

$$\bullet f(\frac{1}{2}) = \overbrace{2 \cdot \frac{1}{2^4}}^{=0} - \overbrace{\frac{1}{2^3}}^{=0} - 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 = 1$$

$$f(1) = \cancel{2 \cdot 1^4} - \cancel{1^3} - \cancel{2 \cdot 1^2} + \cancel{1} + 1 = 1 = f(\frac{1}{2})$$

- $\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \exists c \in (\frac{1}{2}, 1)$ t.c. $f'(c) = 0$, cioè $c = \frac{1}{2} \in$ un pto. critico.

Esercizio 1

[5 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - e^{\ln(1-2x^2)}}{x^3 \cdot \sin(x)} =: \ell$$

Risoluzione

- $x^3 \cdot \sin(x) \sim x^3 \cdot x = x^4$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 4° ordine.
- $e^{\ln(1-2x^2)} = 1 - 2x^2$

$$\bullet \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4) \text{ per } t \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o((2x)^4)$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3} \cdot \cancel{x^4}^1 - \cancel{1} + \cancel{2x^2}}{\cancel{x^4}^1} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \cosh(\sqrt{x}) dx =: I$$

Risoluzione

- Sostituendo $t := \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$ segue

$$\bullet \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\bullet x=0 \Rightarrow t=\sqrt{0}=0, \quad x=1 \Rightarrow t=\sqrt{1}=1$$

Quindi risulta

$$I = \int_0^1 \cosh(t) \cdot 2t dt = \left[\sinh(t) \cdot 2t \right]_0^1 - \int_0^1 \sinh(t) \cdot 2 dt$$

$$= \sinh(1) \cdot 2 \cdot 1 - \underbrace{\sinh(0) \cdot 2 \cdot 0}_{=0} - 2 \cdot [\cosh(t)]_0^1$$

$$= \frac{e - e^{-1}}{2} \cdot 2 - 2 \cdot \left(\frac{e + e^{-1}}{2} - 1 \right) = \cancel{e} - \cancel{e^{-1}} - \cancel{e} + \cancel{e^{-1}} + 2$$

$$= \underline{\underline{2 - \frac{2}{e}}}$$

Esercizio 3

[4 punti]

Calcolare il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \frac{\ln(x)}{x + e \cdot y}$ nel punto $(x_0, y_0) = (e, 1)$.

Risoluzione

$$\bullet P(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$\bullet f(x_0, y_0) = \frac{\overset{=1}{\ln(e)}}{e + e \cdot 1} = \frac{1}{2e}$$

$$\bullet f_x(x, y) = \frac{(x + e \cdot y) \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \ln(x)}{(x + e \cdot y)^2} \Rightarrow$$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{(e + e \cdot 1) \cdot \frac{1}{e} - \ln(e)}{(e + e \cdot 1)^2} = \frac{2 - 1}{4e^2} = \frac{1}{4e^2}$$

$$f_y(x_0, y_0) = - \frac{e \cdot \ln(x)}{(x + e \cdot y)^2} \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = - \frac{e \cdot \ln(e)}{(e + e \cdot 1)^2} = - \frac{e}{4e^2} = - \frac{1}{4e}$$

$$\Rightarrow P(x, y) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{4e^2} \cdot (x - e) - \frac{1}{4e} \cdot (y - 1)$$

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, derivabilità parziale e differenziabilità nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos(x)) \cdot \ln(1 - y^2)}{2x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Risoluzione

• Ponendo $y = m \cdot x$ segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(1 - \cos(x))}^{\sim \frac{x^2}{2}} \cdot \overbrace{\ln(1 - m^2 \cdot x^2)}^{\sim -m^2 \cdot x^2}}{\underbrace{2x^4 + m^4 \cdot x^4}_{= (2 + m^4) \cdot x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot (-m^2 \cdot x^2)}{(2 + m^4) \cdot x^4} = \frac{-m^2}{2 + m^4} \text{ dipende da } m$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $(0, 0) \Rightarrow f$ non è differenziabile in $(0, 0)$

Derivabilità: • $f(h, 0) = 0 = f(0, h) = f(0, 0) \quad \forall h \neq 0 \Rightarrow$

$$\bullet f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{=0}{f(h, 0)} - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\bullet f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overset{=0}{f(0, h)} - f(0, 0)}{h} = 0$$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $(0, 0)$ con grad $f(0, 0) = (0, 0)$

Esercizio 5

[6 punti]

Trovare il dominio, eventuali zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

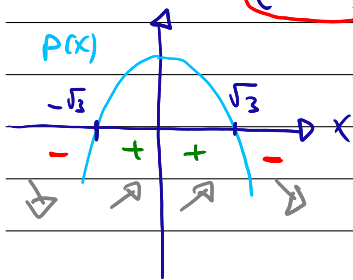
- Visto che $x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ segue $X (= \text{dominio}) = \mathbb{R}$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -3 \text{ opp. } -1$

- Asintoti: - non ci sono asintoti verticali.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow \pm\infty$.

- Estremi Locali: Visto che $X = \mathbb{R}$ e f è derivabile gli unici candidati per punti di estremo locale sono i punti critici.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + 3) \cdot (2x + 4) - 2x \cdot (x^2 + 4x + 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{\cancel{2x^3} + 6x + 4x^2 + 12 - \cancel{2x^3} - 8x^2 - 6x}{(x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 12}{(x^2 + 3)^2} \stackrel{=: p(x)}{=} 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 12 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ &\quad \underbrace{(x^2 + 3)^2}_{> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

- segno di $f'(x) =$ segno di $p(x) \Rightarrow$



$f'(x)$ cambia segno in

- $\sqrt{3}$ da $-$ a $+$ $\Rightarrow x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale
- $\sqrt{3}$ da $+$ a $-$ $\Rightarrow x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale.

Grafico:

$$f(0) = 1$$

