Analisi Matematica (1) **Durata della prova: 2 ore** **18.7.24**

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Corso di Laurea** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione infinitesima.

(ii) Fare l'esempio di una successione infinitesima non monotona.

Risposta

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima se

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(ii) P.e. $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

è infinitesima ma non monotona

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema di Rolle.

(ii) Trovare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot e^{(x^2+3x+2)}$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$ è derivabile in (a,b) con

$f(a) = f(b)$, allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c.

$f'(c) = 0$

(ii) • x_0 si chiama punto critico di f se $f'(x_0) = 0$

• $f'(x) = 1 \cdot e^{x^2+3x+2} + x \cdot e^{x^2+3x+2} \cdot (2x+3)$

$= (2x^2+3x+1) \cdot e^{x^2+3x+2} = 0 \iff$

$2x^2+3x+1 = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$

Quindi $x_1 = -1/2$ è $x_2 = -1$ sono i punti critici di f.

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot e^{\ln(1-x)} - \sin(2x)}{x \cdot \sin(x)}$$

Risoluzione

- $x \cdot \sin(x) \sim x \cdot x = x^2$ per $x \to 0$ $\Rightarrow$ numeratore da sviluppare fino al 2° ordine

- $e^{\ln(1-x)} = 1 - x$ quindi

$$2x \cdot e^{\ln(1-x)} - \sin(2x) = 2x \cdot (1-x) - \left(2x + o(x^2)\right)$$
$$= \cancel{2x} - 2x^2 - \cancel{2x} + o(x^2)$$
$$= -2x^2 + o(x^2) \sim -2x^2 \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x \cdot e^{\ln(1-x)} - \sin(2x)}{x \cdot \sin(x)} \sim \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ per } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot e^{\ln(1-x)} - \sin(2x)}{x \cdot \sin(x)} = -2$$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})\, dx$$

Risoluzione

- Si usa la sostituzione $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x$

$\Rightarrow 2t = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = 2t \cdot dt$, quindi risulta

$$\int \cos\sqrt{x}\, dx = \int \underbrace{2t}_{f} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{g'}\, dt = \underset{f}{2t} \cdot \underset{g}{\sin(t)} - \int \underset{f'}{2} \cdot \underset{g}{\sin(t)}\, dt$$

$$= 2t \cdot \sin(t) + 2\cos(t) + c$$

$$= 2\sqrt{x} \sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\, dx = \left[2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2}$$

$$= 2\pi \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + \underbrace{2\cos(\pi)}_{=-1} - \underbrace{0 \cdot \sin(0)}_{=0} - \underbrace{2\cos(0)}_{=2}$$
$$= -4$$

Esercizio 3 **[4 punti]**

Calcolare la derivata direzionale $D_v f(2,1)$ per $f(x,y) := \dfrac{9\,y}{x+y}$ e il versore $v := \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Risoluzione

- $D_v f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot v_0 + f_y(x_0,y_0)\cdot v_1$ se $v=(v_0,v_1)$
- $f_x(x,y) = \dfrac{-9y}{(x+y)^2} \Rightarrow f_x(2,1) = \dfrac{-9\cdot 1}{(2+1)^2} = -1$
- $f_y(x,y) = \dfrac{(x+y)\cdot 9 - 1\cdot 9y}{(x+y)^2} = \dfrac{9x}{(x+y)^2} \Rightarrow f_y(2,1) = \dfrac{9\cdot 2}{(2+1)^2} = 2$

Quindi risulta

$$D_v f(2,1) = -1\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{3}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

Esercizio 4 **[5 punti]**

Studiare la continuità, la derivabilità parziale e la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) := |x-1|\cdot\big(|y|+1\big)$$

Risoluzione

- f come prodotto di funzioni continue è continua
- derivabilità parziale:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{\underbrace{|h-1|}_{1-h}\cdot 1 - 1}^{= -h \text{ per } h \text{ piccolo}}}{h} = -1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{|-1|\cdot(|h|+1)-1}^{=|h|}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \quad \text{non esiste.}$$

$\Rightarrow$ f non è derivabile parzialmente

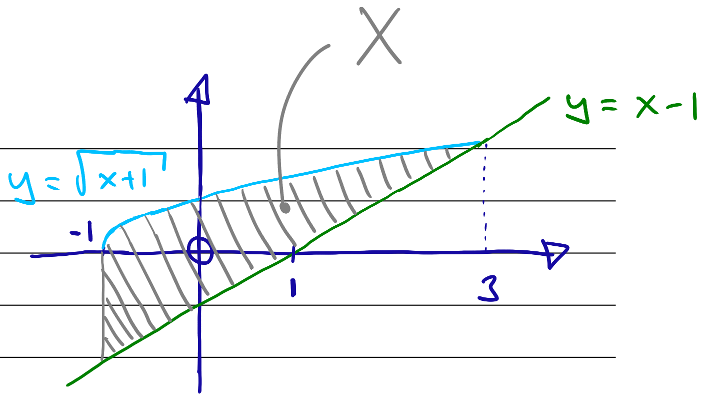
$\Rightarrow$ f non è differenziabile.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Disegnare l'insieme $X := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,3],\ x-1 \le y \le \sqrt{x+1}\right\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X 2xy\,dx\,dy$$

Risoluzione



• Il dominio X è y-semplice e $f(x,y) = 2xy$ è continua

$\Rightarrow$ (per Fubini-Tonelli)

$$I = \int_{x=-1}^{3} \int_{y=x-1}^{\sqrt{x+1}} 2xy\,dy\,dx = \int_{x=-1}^{3} \left[x \cdot y^2\right]_{y=x-1}^{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \Big(x\cdot(x+1) - x \cdot \underbrace{(x-1)^2}_{= x^2 - 2x + 1} \Big)\,dx = \int_{-1}^{3} \left(x^2 \cancel{+x} - x^3 + 2x^2 \cancel{-x} \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{3} -x^3 + 3x^2\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{3^4}{4} + 3^3 - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 \right) = 3^3\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \underbrace{\frac{1}{4} + 1}_{= 5/4}$$

$$= \frac{3^3 + 5}{4} = \frac{27+5}{4} = \frac{32}{4} = 8$$