Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di estremo inferiore per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Fare un esempio di un sottoinsieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ che ha estremo inferiore, ma non minimo.

Risposta

(i) $r_0 = \inf D \iff r_0$ è il più grande minorante di D

$$\iff \begin{cases} r_0 \leq x \quad \forall x \in D \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in D \text{ t.c. } r_0 + \varepsilon > x \end{cases}$$

(ii) Sia $D = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \inf D = 0 \notin D$ quindi $\min D$ non esiste.

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla formula di Taylor con il resto di Peano.

(ii) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 di $f(x) = \ln(\cosh(x))$ in $x_0 = 0$.

Risposta

(i) Sia $f \in C^n(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. Allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{=\text{resto di Peano}} \quad \text{per } x \to x_0$$

(ii) $\cosh(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ $\sim \frac{x^2}{2}$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$t = \cosh(x) - 1$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)^2 + \underbrace{o\left((\cosh(x)-1)^2\right)}_{=o(x^4)}$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) =$$

$$T_4(x) = \boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}} + o(x^4) = \ln(\cosh(x))$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ tale che $\lim_{x \to 0} x \cdot f(1/x) = 0$. Allora

- [a] $f(x) \sim e^x$ per $x \to 0$
- ~~[b]~~ $f(x) = o(x)$ per $x \to \pm\infty$
- [c] f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$
- [d] f é monotona decrescente

Risoluzione

Poniamo $\frac{1}{x} = t \Rightarrow t \to \pm\infty$ per $x \to 0$. Quindi risulta

$x \cdot f(1/x) = \frac{1}{1/x} \cdot f(1/x) = \frac{f(t)}{t} \to 0$ per $t \to \pm\infty$ $\Rightarrow$

$f(t) = o(t)$ per $t \to \pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = o(x)$ per $x \to \pm\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Posto $a_n = \ln(1 + 1/n)$, $b_n = \ln(1 - 1/n)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

- ~~[a]~~ diverge a $+\infty$
- [b] converge
- [c] oscilla
- [d] diverge a $-\infty$

Risoluzione

$a_n - b_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n}) = \ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n-1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$= \ln(1 + \frac{2}{n-1}) \sim \frac{2}{n-1} \sim \frac{2}{n}$ per $n \to +\infty$.

Inoltre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$ diverge a $+\infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ diverge

criterio del confronto asintotico.

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ di f in $(0,0)$ é una funzione *non* lineare di $v = (v_1, v_2)$. Allora

- ~~[a]~~ f non é differenziabile in $(0,0)$
- [b] $f(0,0) = 0$
- [c] f non é continua in $(0,0)$
- [d] f non é derivabile in $(0,0)$

(Sugg.: Utilizzare il Teorema del Gradiente)

Risoluzione

Se f è differenziabile $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \text{grad}\, f(0,0) \cdot v$

è lineare in v.

Quindi a)

Esercizio 4

[4 punti]

Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n-1/2)\cdot\pi)}{2n+e^n} =: a_n$$

Risoluzione

$$|a_n| \le \frac{1}{2n+e^n} \le \left(\frac{1}{e}\right)^n =: q^n \quad \text{con } |\overset{1/e}{\overset{\parallel}{q}}| < 1$$

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge (assolut.)

criterio del confronto

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{\ln(1-x) + \frac{\sin(-x)}{x} + e^x} =: \ell$$

sia diverso da 0.

Risoluzione

$$\ln(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) \quad (x\to 0)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) = -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \Rightarrow \frac{\sin(-x)}{x} = -1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad (x\to 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \to 0). \Rightarrow$$

$$\ln(1-x) + \frac{\sin(-x)}{x} + e^x =$$

$$= \cancel{-x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{-1} + \frac{x^2}{6} \cancel{+1} \cancel{+x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^2) = \frac{1}{6}x^2 + o(x^2) \sim \frac{x^2}{6} \quad (x\to 0)$$

Quindi per il principio di sost.

$$\frac{x^\alpha}{\ln(1-x) + \frac{\sin(-x)}{x} + e^x} \sim \frac{x^\alpha}{\frac{x^2}{6}} = 6 \cdot x^{\alpha-2} \Rightarrow$$

$\ell = \lim_{x\to 0} 6\cdot x^{\alpha-2}$. Questo limite esiste finito $\neq 0$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}.$$

Esercizio 6 [5 punti]

Calcolare

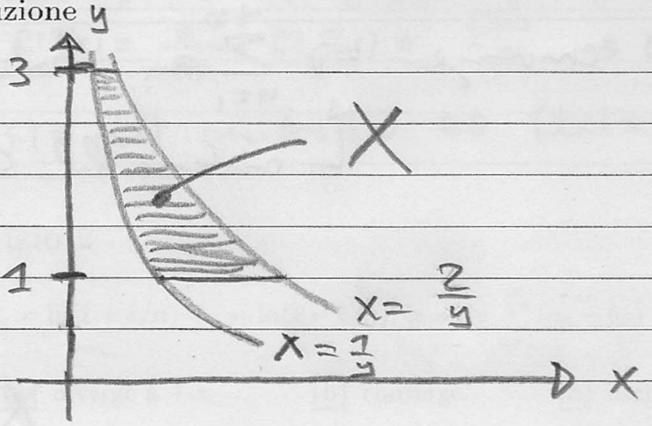
$$I = \iint_X 2xy \, dx \, dy$$

ove $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,3], \frac{1}{y} \le x \le \frac{2}{y}\}$.

~~(In alternativa per i soli studenti immatricolati nel 2008/2009:~~

~~Studiare i punti critici della funzione~~ $\cancel{f(x,y) = 2x^3y^3 + 3(x^2+y^2)}$~~)~~

Risoluzione



X è x-semplice, quindi per Fubini-Tonelli

$$I = \int_1^3 \int_{1/y}^{2/y} 2xy \, dx \, dy = \int_1^3 \left(x^2 \cdot y \Big|_{x=1/y}^{x=2/y} \right) dy$$

$$= \int_1^3 \left(\frac{4}{y^2} \cdot y - \frac{1}{y^2} \cdot y \right) dy = \int_1^3 \frac{3}{y} \, dy$$

$$= 3 \cdot \ln(y) \Big|_1^3 = 3 \cdot (\ln(3) - \ln(1)) = \underline{\underline{3 \cdot \ln(3)}}$$