Analisi Matematica 1, Scritto 2-A. Durata della prova: 2 ore 1.2.10

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente t a $f(x) = 2x^2$ nel punto $x_0 = 1/3$.

Risposta

(i) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: f'(x) \quad \forall x \in (a,b), \text{ allora } f$$

si chiama derivabile con derivata f'.

(ii) $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Qui abbiamo

$f(x_0) = 2 \cdot (1/3)^2 = \frac{2}{9}$

$f'(x) = 4x \Rightarrow f'(x_0) = 4 \cdot 1/3 = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{2}{9} + \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} + \frac{4}{3} \cdot x$$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Calcolare la derivata di $f(x) = \int_2^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ in $x = 3$.

Risposta

(i) Se $f \in C[a,b]$, allora la funzione integrale

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ è derivabile con

$F'(x) = f(x)$.

(ii) Per il teorema fondamentale segue

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow f'(3) = \frac{\sin(3)}{3}.$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $s_0 = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] Se $s_0 < +\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- [b] $a_n < s_0$ definitivamente
- [c] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = s_0$
- [X] $\forall \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n + \epsilon > s_0$

Risoluzione

vale d) per la caratterizzazione dell'estremo superiore.

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (1 - e^x)$ é

- [a] dispari
- [X] derivabile in $\mathbb{R}$
- [c] limitata
- [d] non derivabile in 0

Risoluzione

f è (composizione di funzioni derivabili) derivabile in ogni $x \neq 0$. In $x = 0$ vale

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \underbrace{\sqrt[3]{h}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1-e^h}{h}}_{\to -1} \to 0 \quad (h \to 0) \quad \Rightarrow f \text{ è derivabile in } 0 \Rightarrow f \text{ è derivabile in } \mathbb{R}.$$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ e $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$. Allora

- [a] $\int_0^1 f(x)^2\,dx = 16$
- [b] $\int_{-1}^0 f(-x)\,dx = -4$
- [X] $\exists x \in [0,1]$ tale che $f(x) \geq 4$
- [d] $f(x) > 0$ per $x \in [0,1]$

Risoluzione

La risposta esatta è c. Se, per assurdo, supponiamo che c non vale, allora

$$f(x) < 4 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lunghezza dell'} \\ \text{intervallo } [0,1]}}{1} \cdot 4 = 4 \quad ⚡$$

che è una contraddizione. Quindi vale c.

Esercizio 4

[4 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, stabilire se

- f é continua in $(0,0)$,
- f é derivabile in $(0,0)$,
- f é differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione

• Studiamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Il candidato limite è $\ell = 0$.

Inoltre vale $|f(x,y) - \ell| \overset{\text{in coord. polari}}{=} |f(\rho\cdot\cos\vartheta, \rho\cdot\sin\vartheta)|$

$= \left| \frac{\rho^3 \cdot \cos(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta)}{\rho^2} \right| \leq \rho \to 0$ per $\rho \to 0 \Rightarrow$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) \Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$.

• f è derivabile in $(0,0)$, visto che $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.

e $\text{grad} f(0,0) = (0,0)$. • f non è differenziabile in $(0,0)$, visto che

$\frac{f(x,y) - \overbrace{p(x,y)}^{=0}}{\underbrace{\|(x,y)\|}_{=\rho}} \overset{\text{in coord. polari}}{=} \cos(\vartheta)\cdot\sin^2(\vartheta) \not\to 0$ per $\rho \to 0$.

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(4x)) + x^4}{\sin^2(4x) - \sin(4x^2)} = -\frac{2}{3}$$

Risoluzione

$\sin(t) = t + o(t^2)$ per $t \to 0 \Rightarrow$

$(t = 4x)$: $\sin^2(4x) = (4x + \underbrace{o((4x)^2)}_{=o(x^2)})^2 = 16x^2 + o(x^4) = 16x^2 + o(x^2)$

$(t = 4x^2)$: $\sin(4x^2) = 4x^2 + o(4x^2) = 4x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \sin^2(4x) - \sin(4x^2) = 16x^2 - 4x^2 + o(x^2) = 12x^2 + o(x^2) \sim 12x^2$ $(x \to 0)$

Quindi dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:

$\ln(1+t) = t + o(t)$ $(t \to 0)$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ $(t \to 0)$ $\overset{(t=4x)}{\Rightarrow} \cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + o((4x)^2)$

$= 1 - 8x^2 + o(x^2) \Rightarrow \cos(4x) - 1 = -8x^2 + o(x^2)$. Quindi

$\ln(\cos(4x)) = \ln(1 + (\cos(4x) - 1)) = \cos(4x) - 1 + o(\underbrace{\cos(4x) - 1}_{\sim -8x^2})$

$= -8x^2 + o(x^2)$. $\Rightarrow$ $o(x^2)$

$\ln(\cos(4x)) + \underbrace{x^4}_{=o(x^2)} = -8x^2 + o(x^2) \sim -8x^2$ $(x \to 0)$

$\Rightarrow \frac{\ln(\cos(4x)) + x^4}{\sin^2(4x) - \sin(4x^2)} \sim \frac{-8x^2}{12x^2} = -\frac{2}{3} =$ limite

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare dominio X, simmetrie, zeri, limiti alla frontiera di X ed estremi locali della funzione $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\ln|x|}}$ tracciandone un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio X: $x \in X \iff \begin{cases} |x| > 0 \\ \ln|x| \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \iff x \neq \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

• simmetrie: f è dispari. Quindi basta studiare $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ per $x > 0$.

• zeri: $f(x) = 0$ mai.

• limiti alla frontiera: $x \to 0^+$: $\underset{\to 0}{x} \cdot e^{\overset{\frac{1}{-\infty} = 0}{\frac{1}{\ln x}}}$, $\ln x \to -\infty$ $\to e^0 = 1$ $\to 0 \cdot 1 = 0$

cioè $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$x \to 1^-$: $\underset{\to 1}{x} \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}}$, $\ln(x) \to 0^-$ $\to \frac{1}{0^-} = -\infty$ $\to e^{-\infty} = 0$ $\to 1 \cdot 0 = 0$

cioè $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. $x \to 1^+$: $\underset{\to 1}{x} \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}}$, $\ln(x) \to 0^+$ $\to +\infty$ $\to e^{+\infty} = +\infty$ $\to 1 \cdot +\infty = +\infty$

cioè $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. $x \to +\infty$: $\underset{\to +\infty}{x} \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}} \to e^0 = 1$ $\to +\infty$

• $f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}} + \cancel{x} \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}} \cdot \frac{-1}{\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = e^{\frac{1}{\ln(x)}}\left(1 - \frac{1}{\ln^2(x)}\right)$

$x > 0$

$= e^{\frac{1}{\ln(x)}} \cdot \left(\frac{\ln^2(x) - 1}{\ln^2(x)}\right)$. Quindi $f'(x) = 0 \iff$

$\ln(x) = \pm 1 \iff x = e$ opp. $x = 1/e$

Inoltre, in $x = 1/e$ la derivata $f'(x)$ cambia segno da "+" a "−" $\Rightarrow$ pto. di max loc.

in $x = e$ la derivata $f'(x)$ cambia segno da "−" a "+" $\Rightarrow$ pto. di min. locale