Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente t a $f(x) = x^3/3$ nel punto $x_0 = 1/2$.

Risposta

(i) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Se esiste finito

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: f'(x)$ $\forall x\in(a,b)$, allora f

si dice derivabile con derivata f'.

(ii) $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$. Qui vale

$f(x_0) = \frac{(1/2)^3}{3} = \frac{1}{24}$, $f'(x) = x^2 \Rightarrow f'(1/2) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{24} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{x}{4}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

(ii) Calcolare la derivata di $f(x) = \int_3^x \frac{1-\cos(t)}{t}\,dt$ in $x = 2$.

Risposta

(i) Se $f\in C[a,b]$, allora la funzione integrale

$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$, è derivabile con

$F'(x) = f(x)$.

(ii)

Per il teorema fondamentale f è derivabile con

$f'(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} \Rightarrow f'(2) = \frac{1-\cos(2)}{2}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $r_0 = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] Se $r_0 > -\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
- [b] $a_n > r_0$ definitivamente
- [c] (X) $\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n - \epsilon < r_0$
- [d] Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = r_0$

Risoluzione

c) per la caratterizzazione del estremo inferiore.

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = (1 - e^x) \cdot |x|$ é

- [a] pari
- [b] limitata
- [c] non derivabile in 0
- [d] derivabile in $\mathbb{R}$

Risoluzione

f è (come composizione di funzioni derivabili) derivabile in ogni $x \neq 0$. In $x = 0$ vale

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \underbrace{\frac{1-e^h}{h}}_{\to -1} \cdot \underbrace{|h|}_{\to 0} \to -1 \cdot 0 = 0 \quad (h \to 0)$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x = 0$ $\Rightarrow$ f è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C(\mathbb{R})$ e $\int_0^4 f(x)\,dx = 1$. Allora

- [a] $\int_0^4 f(x)^2\,dx = 1$
- [b] $f(x) > 0$ per $x \in [0, 4]$
- [c] $\int_{-4}^0 f(x)\,dx = -1$
- [d] $\exists x \in [0, 4]$ tale che $f(x) \le 1/4$

Risoluzione

La risposta esatta è d). Se, per assurdo, supponiamo che d) non vale, allora $f(x) > 1/4$ $\forall x \in [0,4] \Rightarrow \int_0^4 f(x)\,dx > \frac{1}{4} \cdot \underbrace{4}_{= \text{lunghezza dell'intervallo } [0,4]} = 1$ ↯

che è una contraddizione.

Quindi vale d).

Esercizio 4

[4 punti]

Data la funzione $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, stabilire se

- f é continua in $(0,0)$,
- f é derivabile in $(0,0)$,
- f é differenziabile in $(0,0)$.

Risoluzione

Studiamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Il candidato limite è $\ell = 0$.

Inoltre vale $|f(x,y)-\ell| \overset{\text{in coord. polari}}{=} |f(\rho\cdot\cos\vartheta, \rho\cdot\sin\vartheta)|$

$= \left|\frac{\rho^3\cdot\cos^2(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta)}{\rho^2}\right| \leq \rho \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$. Inoltre f è derivabile parzialmente in $(0,0)$ visto che $f(x,0) = 0 = f(0,y)$ $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$. Invece f non è differenziabile in $(0,0)$ visto che

$$\frac{f(x,y) - \underbrace{p(x,y)}_{=0}}{\underbrace{\|(x,y)\|}_{=\rho}} \underset{\text{in coord. polari}}{=} \cos^2(\vartheta)\cdot\sin(\vartheta) \not\to 0 \text{ per } \rho\to 0.$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos^2(3x) - \cos(2x)}{\ln(\cosh(2x)) + x^5} =: \ell \quad \left(= -\frac{7}{2}\right)$$

Risoluzione

$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t\to0$ $\overset{(t=2x)}{\Rightarrow}$ $\cosh(2x) - 1 = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$

$\ln(1+t) = t + o(t)$ per $t\to0$

$\overset{t=\cosh(2x)-1}{=}$ $\cosh(2x) - 1 + o(\underbrace{\cosh(2x)-1}_{\sim 2x^2}) = 2x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow \ln(\cosh(2x)) + \underbrace{x^5}_{=o(x^2)} = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2$ per $x\to0$.

Quindi dobbiamo sviluppare il numeratore fino al 2° ordine:

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t\to0$ $\Rightarrow$

$(t=3x)$: $\cos^2(3x) = \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2)\right)^2 = 1 - 9x^2 + o(x^2)$ $(x\to0)$

$(t=2x)$: $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2)$ $(x\to0)$

$\Rightarrow \cos^2(3x) - \cos(2x) = \cancel{1} - 9x^2 \cancel{-1} + 2x^2 + o(x^2) = -7x^2 + o(x^2)$

$\sim -7x^2$ $(x\to0)$

Quindi per il princ. di sostituzione segue

$$\ell = \lim_{x\to0} \frac{-7x^2}{2x^2} = -\frac{7}{2} = \text{limite}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare dominio X, simmetrie, zeri, limiti alla frontiera di X ed estremi locali della funzione $f(x) = |x| \cdot e^{\frac{2}{\ln(x^2)}}$ tracciandone un grafico approssimativo.

Risoluzione

• dominio X: $x \in X \iff \begin{cases} x^2 > 0 \\ \ln(x^2) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \iff x \neq \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

• Simmetrie: f è pari. Quindi basta studiare $f(x)$ per $x > 0$.

Per $x > 0$ vale: $\ln(x^2) = 2 \cdot \ln(x) \Rightarrow$

$f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{\ln(x)}}$, $x > 0$.

• Zeri, limiti alla frontiera e studio f' come sul compito $\boxed{2-A}$.

Grafico:

$f(x) = |x| \cdot e^{\frac{2}{\ln(x^2)}}$