Analisi Matematica (1) | Durata della prova: 2 ore | 2.9.24

Cognome: .... **Nome:** ....

Matricola: .... **Corso di Laurea:** ....

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Domanda 1

[4 punti]

(i) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

(ii) Tale criterio è utile per studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Risposta

(i) Se $a_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: q$ esiste, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- converge se $q < 1$
- diverge a $+\infty$ se $q > 1$
- non si può concludere nulla se $q = 1$.

(ii) In questo caso
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1 = q$, quindi non si può studiare la convergenza di tale serie con il criterio del rapporto.

Domanda 2

[4 punti]

Sia $f \in C^1[a,b]$ tale che $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Allora

- [a] f è decrescente
- [b] f ha un unico punto di massimo in $[a,b]$
- [X] f ha un punto critico in $[a,b]$
- [d] esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

Risposta (da giustificare!)

Visto che f è C^1, f' è continua e verifica la condizione $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. Quindi per il teorema degli zeri esiste $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$, cioè f ha un punto critico in (a,b).

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{e^{n+1}}-\sqrt{e^{n-1}}}{\sqrt{e^n+2}} =: a_n$$

Risoluzione

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{e^{n+1}}-\sqrt{e^{n-1}}\right) : \sqrt{e^n}}{\sqrt{e^n+2} \quad : \sqrt{e^n}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}-\sqrt{e^{-1}}}{\sqrt{1+\frac{2}{e^n}}} \to \sqrt{e}-\sqrt{e^{-1}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\frac{2}{e^n} \to 0$ per $n \to +\infty$

Esercizio 2

[5 punti]

Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I := \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot(\ln(x)+2)^3}$$

$\frac{dx}{x} = dt$, $(\ln(x)+2)^3 = (t+2)^3$

Risoluzione

• Sost. $\ln(x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Quindi $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot(\ln(x)+2)^3} = \int (t+2)^{-3}\,dt = \frac{(t+2)^{-2}}{-2}+c$

$$= \frac{-1}{2(\ln(x)+2)^2}+c$$

• $\displaystyle I = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x\cdot(\ln(x)+2)^3} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{2(\ln(x)+2)^2}\right]_1^b$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-1}{2(\ln(b)+2)^2} + \frac{1}{2(\ln(1)+2)^2}\right]$$

$\ln(b) \to +\infty$, $\frac{-1}{2(\ln(b)+2)^2} \to 0$, $\ln(1) = 0$

$$= \frac{1}{2\cdot 2^2} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 3

[5 punti]

In quale punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano $z = 2 + x - y$ è tangente al grafico di $f(x,y) = 1 + xy$?

Risoluzione

• L'equazione del piano tangente in (x_0, y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$= 1 + x_0 \cdot y_0 + y_0 \cdot (x - x_0) + x_0 \cdot (y - y_0) = (1 - x_0 y_0) + y_0 \cdot x + x_0 \cdot y$$

Confrontando i coefficienti segue

$$1 - x_0 \cdot y_0 \overset{!}{=} 2, \quad y_0 \overset{!}{=} 1, \quad x_0 \overset{!}{=} -1$$

e infatti tutte le tre condizioni sono verificate per $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$. Quindi il punto cercato è $(x_0, y_0) = (-1, 1)$.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2} =: \ell$$

Risoluzione

• Ponendo $y = mx$ segue

$$\frac{\sin^2(x \cdot mx)}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{\sin^2(mx^2)}{(1+m^2)\cdot x^2} \sim \frac{(mx^2)^2}{(1+m^2)\cdot x^2} = \underbrace{\frac{m^2}{1+m^2} \cdot x^2}_{\to 0 \text{ per } x \to 0}$$

Quindi l'unico candidato per il limite è $\ell = 0$.

• Passiamo alle coordinate polari $x = \rho \cdot \cos\vartheta$, $y = \rho \cdot \sin\vartheta$:

$$\left| \frac{\sin^2(\rho\cdot\cos\vartheta \cdot \rho\sin\vartheta)}{\rho^2} - 0 \right| \leq \frac{(\rho^2 \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\vartheta)^2}{\rho^2}$$

$|\sin\alpha| \leq |\alpha| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$= \rho^2 \cdot (\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta)^2 \leq \rho^2 \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0$$

$\Rightarrow$ Il limite converge a $\ell = 0$.

Esercizio 5 **[6 punti]**

Studiare dominio, simmetrie, periodicità, zeri, asintoti e punti di estremo locale della funzione $f(x) = \ln\big(1 - \cos(x)\big)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

Dominio X: $x \in X \iff 1 - \underbrace{\cos(x)}_{\leq 1} > 0 \iff \cos(x) \neq 1 \iff x \neq 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$

Quindi $X = \mathbb{R} \setminus \{2\pi \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$

Simmetrie: cos è pari $\Rightarrow$ f è pari.

Periodicità: cos è periodico di periodo $T = 2\pi$ $\Rightarrow$ f è periodico di periodo $T = 2\pi$

Quindi basta studiare f nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Zeri: $f(x) = 0 \iff 1 - \cos(x) = 1 \iff \cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ opp. $x = \frac{3}{2}\pi$

se $x \in (0, 2\pi)$

Asintoti: $\lim_{x \to \{0, 2\pi\}} f(x) = \ln(0) = -\infty \Rightarrow x = 0$ e $x = 2\pi$ sono asintoti verticali. Non esistono altri asintoti.

Studio di f': $f'(x) = \frac{1}{1-\cos(x)} \cdot \sin(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = \pi$

se $x \in (0, 2\pi)$

Inoltre $1 - \cos(x)$ è positivo per x vicino a π (visto che $\cos(\pi) = -1$) e $\sin(x)$ cambia segno in $x = \pi$ da "+" a "−"

$\Rightarrow x = \pi$ è un punto di massimo locale di f.

Grafico: