

Cognome Nome

Matricola Corso di Laurea

Domanda 1

[4 punti]

(i) Dare la definizione di successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monotona.(ii) Dare l'esempio di una successione *non* monotona $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{2}$.

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
Σ	

Risposta

(i) Una successione si dice monotona se è crescente oppure decrescente, cioè se vale

- $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (crescente), oppure
- $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (decrescente).

(ii) P.e. $a_n = \sqrt{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ non è monotona e converge a $l = \sqrt{2}$

Domanda 2

[4 punti]

(i) Enunciare il teorema della media integrale.

(ii) Trovare un punto c del teorema della media integrale per la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[1, e^2]$.

Risposta

(i) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora $\exists c \in [a, b]$ d.c.

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

(ii) • f è continua con $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^{e^2} = \ln(e^2) - \ln(1) = 2$

Quindi cerchiamo $c \in [1, e^2]$ d.c. $f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{2}{e^2-1}$

$\parallel$
 $\frac{1}{c}$

$$\Leftrightarrow c = \frac{e^2-1}{2}$$

Esercizio 1

[4 punti]

Studiare il carattere della serie

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(1 - \sqrt[n]{n^2}\right)^{3n}}_{=: a_n}$$

Risoluzione

Applicando il criterio della radice n-esima

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1 - \sqrt[n]{n^2}\right)^{3n} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \sqrt[n]{n^2}\right)^3 \rightarrow 0^3 = 0 = q < 1$$

↓
1 per $n \rightarrow +\infty$
(limite notevole)

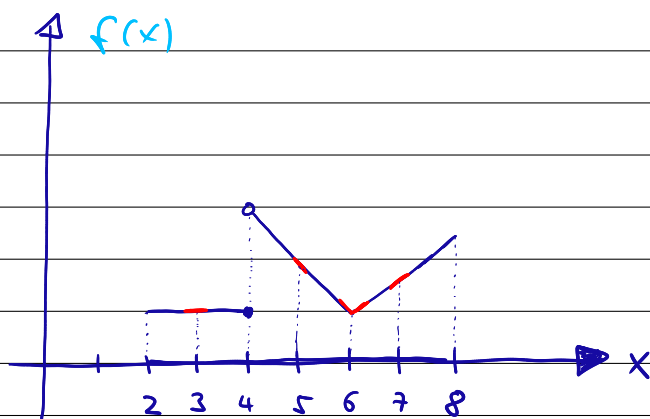
$\Rightarrow S$ converge.

Esercizio 2

[5 punti]

Disegnare il grafico di una funzione $f : [2, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f'(3) = 0$, non continua in $x = 4$, con $f'(5) = -1$, con un punto angoloso in $x = 6$ e con $f'(7) = 1$.

Risoluzione



Esercizio 3

[5 punti]

Trovare, se esiste, l'asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$ della funzione $f(x) = x \cdot e^{1-\frac{2}{x}}$.

Risoluzione

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \cdot e^{1-\frac{2}{+\infty}} = +\infty \Rightarrow \text{possibilità di un}$$

asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^{1-\frac{2}{x}}}{x} = e$$

$$\bullet q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{1-\frac{2}{x}} - e \cdot x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e \cdot x \cdot (e^{-\frac{2}{x}} - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2e \cdot \frac{e^{-\frac{2}{x}} - 1}{-\frac{2}{x}} = -2e$$

$\frac{e^{-\frac{2}{x}} - 1}{-\frac{2}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

$\Rightarrow y = e \cdot x - 2e$ è l'equazione dell'asintoto obliquo cercato.

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = \frac{2x \cdot \sin(xy)}{y}$ nel punto $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

Risoluzione

$$\bullet p(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$\bullet f(x_0, y_0) = \frac{\pi \cdot \sin(\pi/2)}{1} = \underline{\underline{\pi}}$$

$$\bullet f_x(x, y) = \frac{2 \cdot \sin(xy) + 2x \cdot \cos(xy) \cdot y}{y} \Rightarrow$$

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{2 \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + 2x \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) \cdot 1}{1} = \underline{\underline{2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{y \cdot 2x \cdot \cos(xy) \cdot x - 1 \cdot 2x \sin(xy)}{y^2} \Rightarrow$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{1 \cdot \pi \cdot \cos(\pi/2) \cdot \pi/2 - 2 \cdot \pi/2 \cdot \sin(\pi/2)}{1^2} = \underline{\underline{-\pi}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p(x, y) = \pi + 2 \cdot (x - \frac{\pi}{2}) - \pi \cdot (y - 1)}}$$

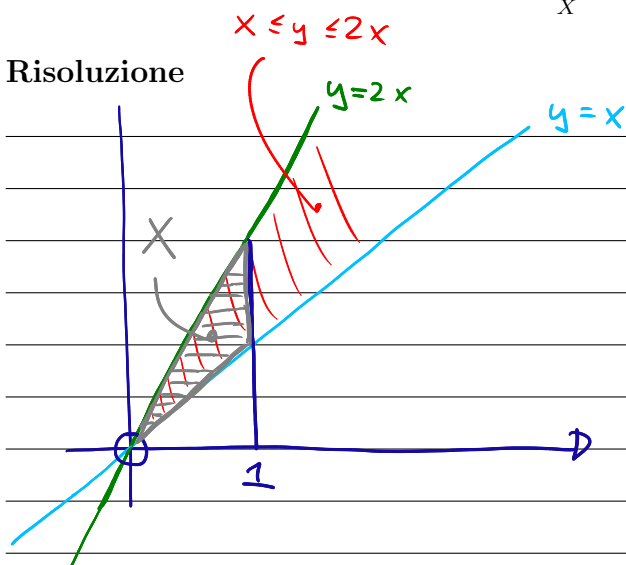
Esercizio 5

[5 punti]

Disegnare l'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$ e calcolare l'integrale doppio

$$I := \iint_X x^3 y^2 dx dy.$$

Risoluzione



Per il teorema di Fubini-Tonelli segue

$$I = \int_0^1 \int_x^{2x} x^3 y^2 dy dx = \int_0^1 x^3 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=x}^{2x} dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot \frac{8x^3 - x^3}{3} dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 7x^6 dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$